

de π . Si l'on veut s'en tenir à des méthodes physiques, le mieux est peut-être simplement de mesurer avec soin le périmètre et le diamètre d'un cercle assez grand et de faire le quotient. En réalité, rien ne vaut les calculs purs ne s'appuyant pas sur des hypothèses et des mesures physiques qu'on ne parvient jamais à mener avec plus de quelques chiffres significatifs. Venons-en donc aux méthodes mathématiques.

Nombre d'Archimède et conjecture de Syracuse

Le nombre π , dont Archimède a été le premier à proposer une méthode mathématique permettant d'en calculer les chiffres aussi loin qu'on le souhaite, porte parfois le nom de constante d'Archimède. Archimède est né, a vécu et est mort à Syracuse, en Sicile. En mathématiques, Syracuse est aussi le nom d'une conjecture qui intéresse beaucoup de monde à cause de sa simplicité.

Décrivons cette « conjecture de Syracuse » ou « conjecture de Collatz ». On part d'un entier positif quelconque n ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le remplace par $3n + 1$. Et on recommence. Par

exemple, de $n = 13$ on passe à 40, puis à 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2 et enfin 1. La conjecture affirme que quel que soit l'entier initial n , on finit toujours par arriver à 1. Personne n'a su la démontrer. Expérimentalement, elle a été vérifiée jusqu'à $2^{60} = 1,15 \times 10^{18}$. *A priori*, elle n'a rien à voir avec π , malgré son nom qui semble établir un lien avec Archimède. La Syracuse qui intervient dans le nom de la conjecture est en fait la ville américaine de Syracuse, dans l'État de New York, dont l'université a été une étape importante dans la diffusion de la conjecture au monde entier.

Une question naturelle se pose cependant : si π est vraiment partout, n'existe-t-il pas un moyen de le calculer à partir de la conjecture de Syracuse ? La réponse est oui. Le Français Roland Yéléhada a en effet mis au point une méthode de calcul de π à partir de la conjecture de Syracuse.

Le principe est le suivant. On calcule la suite de Syracuse pour tous les nombres jusqu'à une certaine borne n , par exemple 100. Pour chacune des suites calculées, par exemple [13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], on évalue la longueur, ici 10, et la somme des éléments de la suite, ici 119. On teste si les deux nombres obtenus ont un diviseur

commun plus grand que 1 ; ce n'est ici pas le cas. On prend alors le nombre a de fois où la réponse a été NON, puis on divise a par n , ce qui donne un nombre b . On calcule enfin la racine carrée de $6/b = c$. Ce nombre c est une valeur approchée de π .

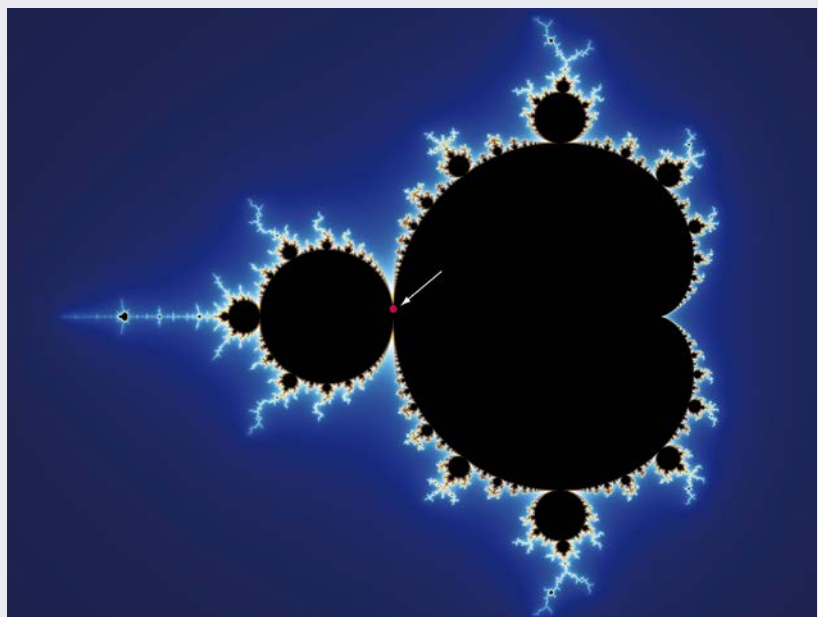
La méthode ne donne pas très rapidement les chiffres de π , mais on a des raisons de croire qu'elle converge vers π , car la longueur et la somme d'une suite de Syracuse, à cause de comportements imprévisibles des suites, sont comme deux nombres entiers tirés au hasard. Or on sait, d'après un résultat de 1881 démontré par Ernesto Cesaro, que la probabilité que deux entiers tirés au hasard n'aient pas de diviseur commun supérieur à 1 est $6/\pi^2$. Bien qu'aujourd'hui aucune preuve mathématique rigoureuse n'ait été donnée du résultat quand n tend vers l'infini, les expériences effectuées en écrivant de petits programmes confirment qu'il s'agit bien d'une méthode de calcul de π . Pour $n = 100$, on obtient $a = 66$, $b = 0,66$, $c = 3,01511...$ Pour $n = 1\,000$, on obtient $a = 606$, $b = 0,606$, $c = 3,146583...$

Bien évidemment, il s'agit d'un jeu et pour disposer de beaucoup de décimales de π , ce procédé n'est pas à recommander,

L'ensemble de Mandelbrot et π

On part d'un point c (marqué en rouge) de coordonnées $(-3/4, 1/10^k)$ et on applique la règle $c_{n+1} = c_n^2 + c$ jusqu'à sortir du disque de rayon 2. Les coordonnées du « carré » c^2 du point $c = (a, b)$ sont, par définition, $(a^2 - b^2, 2ab)$.

Le nombre d'étapes nécessaires est 3 pour $k = 0$; 33 pour $k = 1$; 315 pour $k = 2$; 3 143 pour $k = 3$; 31 417 pour $k = 4$; 314 160 pour $k = 5$; 3 141 593 pour $k = 6$. On reconnaît (à l'exception des derniers chiffres) le développement décimal de π . La preuve précise que ces calculs des chiffres de π se poursuivent jusqu'à l'infini n'a été donnée qu'en 2001, par Aaron Klebanoff aux États-Unis : π est caché de manière inattendue dans l'ensemble fractal de Mandelbrot, qui est l'ensemble des points c ne s'échappant pas à l'infini.



Le jeu de la vie et π

Une fantastique configuration des cellules du jeu de la vie a été conçue par Adam Goucher. En respectant la règle unique de fonctionnement « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 voisins vivants », elle



calcule π . Bien plus surprenant, elle écrit en diagonale le résultat sous la forme d'une configuration stable qui énumère les chiffres décimaux de π .

On ne peut pas ici faire apparaître les détails de son million et quelque de cellules vivantes, mais vous pouvez la télécharger (<http://bit.ly/1S7PwJw>) et la faire fonctionner avec le logiciel gratuit Golly (<http://golly.sourceforge.net>).

pas plus que les méthodes de Buffon, du fusil ou de Galperin.

Voici à présent une méthode toute aussi étonnante que les précédentes, mais plus simple encore à mettre en œuvre et qui, elle, pourra plus rapidement donner jusqu'à 5 ou 6 décimales de π .

Caché dans une figure fractale

L'ensemble de Mandelbrot est la plus célèbre des fractales (voir l'encadré page 81). Sa définition, succincte, tient en quelques mots : c'est l'ensemble des points c du plan complexe tels que la suite $c_0=0$, $c_1=c$, $c_2=c_1^2+c$, ..., $c_{n+1}=c_n^2+c$, ... reste dans une partie bornée du plan ; autrement dit, c'est l'ensemble des points c tels que la distance de c_n à 0 ne tend pas vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Si vous n'avez jamais entendu parler du « plan complexe », il suffit, pour comprendre tout ce qui nous occupe ici, de savoir que le carré d'un point de coordonnées (a, b) (représentant le nombre complexe $c = a + ib$) dans le plan complexe est le point de coordonnées $(a^2 - b^2, 2ab)$.

Les outils nécessaires à la visualisation de l'ensemble de Mandelbrot, et surtout les puissances de calcul suffisantes (en chaque

point il faut calculer la suite c_n), ne sont devenus disponibles qu'au début des années 1980. Grâce à quoi on a pris conscience de la richesse de cet ensemble et du découpage infiniment fin de sa frontière. Adrien Douady, de l'université Paris-Sud, et John Hubbard, de l'université Cornell aux États-Unis, ont montré en 1981 que cet ensemble est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant : on peut passer d'un point à un autre de l'ensemble en utilisant un chemin qui y reste tout le temps.

En 1991, Dave Boll, étudiant en informatique à l'université d'État du Colorado, explore l'ensemble de Mandelbrot et tente de savoir si un point unique sépare la partie de cet ensemble à droite du point $c = [-3/4, 0]$ de la partie qui se trouve à sa gauche. Il prend donc des valeurs de c de plus en plus proches du point $[-3/4, 0]$ et calcule combien de points de la suite il faut considérer avant que c_n sorte du cercle de rayon 2. On sait en effet que dès que la suite c_n sort de ce cercle, elle part inévitablement à l'infini.

Il essaie donc comme point de départ $c = [-3/4, 1]$ et trouve que 3 itérations suffisent pour que la suite sorte du cercle. Il essaie $c = [-3/4, 1/10]$, il en faut maintenant 33. Avec $c = [-3/4, 1/100]$, il en faut 315. Avec $c = [-3/4, 1/1000]$, il en

faut 3 143. Avec $c = [-3/4, 1/10000]$, il en faut 31 417. Avec $c = [-3/4, 1/100000]$, il en faut 314 160. Avec $c = [-3/4, 1/1000000]$, il en faut 3 141 593. Etc.

Stupéfaction ! Les chiffres des nombres calculés sont, à l'exception des derniers, ceux de π écrit en base 10 : 314159... Les calculs à programmer si vous voulez contrôler les affirmations mentionnées sont particulièrement simples. Pour chaque entier k à partir de zéro, définissez la suite de couples de nombres réels (a_n, b_n) :

$a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = -3/4, b_1 = 1/10^k$,
 $a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 - 3/4, b_{n+1} = 2a_n b_n + 1/10^k$
 et déterminez le premier n tel que $a_n^2 + b_n^2$ soit supérieur à 4. Les nombres n calculés seront les nombres 3, 33, 315, 3 143, 31 417, 314 160, 3 141 593, etc.

David Boll découvre aussi que, partant de $(1/4 + c, 0)$ et en prenant des valeurs de c de plus en plus petites (cette fois, il commence par $c = 1/100$ et divise par 100 à chaque nouvel essai), on tombe sur les entiers suivants : 30, 312, 3 140, 31 414, 314 157, etc. À nouveau, c'est π !

Notons que rien, dans la définition de l'ensemble de Mandelbrot, n'a de rapport avec la géométrie du cercle. Pourtant, une simple itération partant d'un nombre choisi de plus en plus petit donne assez rapidement des décimales de π .

Notons aussi que, par cette méthode, calculer 20 décimales de π demanderait plus de 10^{20} itérations, ce qui est la limite de ce qu'on peut espérer faire aujourd'hui, même en mobilisant les plus puissants ordinateurs. Cette méthode, aussi simple et élégante qu'elle soit, ne peut donc pas rivaliser avec les meilleures méthodes connues de calcul de π (mentionnées au tout début de cet article), qui sont plus compliquées mais beaucoup plus efficaces.

Écrit en diagonale par le jeu de la vie

Un exploit de calcul d'une autre nature concernant π est lié au célèbre « jeu de la vie » de John Conway. Ce réseau d'automates cellulaires est l'un des moyens les plus élémentaires de mener des calculs. Chaque case du plan infini, muni d'un