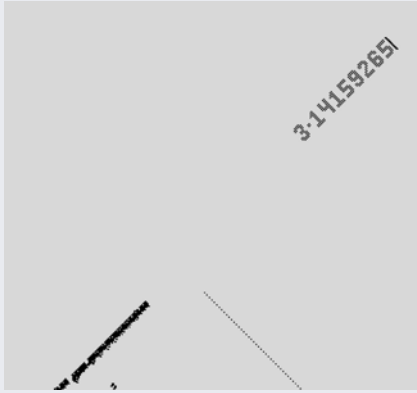


Le jeu de la vie et π

Une fantastique configuration des cellules du jeu de la vie a été conçue par Adam Goucher. En respectant la règle unique de fonctionnement « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 voisins vivants », elle



calcule π . Bien plus surprenant, elle écrit en diagonale le résultat sous la forme d'une configuration stable qui énumère les chiffres décimaux de π . On ne peut pas ici faire apparaître les détails de son million et quelque de cellules vivantes, mais vous pouvez la télécharger (<http://bit.ly/1S7PwJw>) et la faire fonctionner avec le logiciel gratuit Golly (<http://golly.sourceforge.net>).

pas plus que les méthodes de Buffon, du fusil ou de Galperin.

Voici à présent une méthode toute aussi étonnante que les précédentes, mais plus simple encore à mettre en œuvre et qui, elle, pourra plus rapidement donner jusqu'à 5 ou 6 décimales de π .

Caché dans une figure fractale

L'ensemble de Mandelbrot est la plus célèbre des fractales (voir l'encadré page 81). Sa définition, succincte, tient en quelques mots : c'est l'ensemble des points c du plan complexe tels que la suite $c_0 = 0$, $c_1 = c$, $c_2 = c_1^2 + c$, ..., $c_{n+1} = c_n^2 + c$, ... reste dans une partie bornée du plan ; autrement dit, c'est l'ensemble des points c tels que la distance de c_n à 0 ne tend pas vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Si vous n'avez jamais entendu parler du « plan complexe », il suffit, pour comprendre tout ce qui nous occupe ici, de savoir que le carré d'un point de coordonnées (a, b) (représentant le nombre complexe $c = a + ib$) dans le plan complexe est le point de coordonnées $(a^2 - b^2, 2ab)$.

Les outils nécessaires à la visualisation de l'ensemble de Mandelbrot, et surtout les puissances de calcul suffisantes (en chaque

point il faut calculer la suite c_n), ne sont devenus disponibles qu'au début des années 1980. Grâce à quoi on a pris conscience de la richesse de cet ensemble et du découpage infiniment fin de sa frontière. Adrien Douady, de l'université Paris-Sud, et John Hubbard, de l'université Cornell aux États-Unis, ont montré en 1981 que cet ensemble est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant : on peut passer d'un point à un autre de l'ensemble en utilisant un chemin qui y reste tout le temps.

En 1991, Dave Boll, étudiant en informatique à l'université d'État du Colorado, explore l'ensemble de Mandelbrot et tente de savoir si un point unique sépare la partie de cet ensemble à droite du point $c = [-3/4, 0]$ de la partie qui se trouve à sa gauche. Il prend donc des valeurs de c de plus en plus proches du point $[-3/4, 0]$ et calcule combien de points de la suite il faut considérer avant que c_n sorte du cercle de rayon 2. On sait en effet que dès que la suite c_n sort de ce cercle, elle part inévitablement à l'infini.

Il essaie donc comme point de départ $c = [-3/4, 1]$ et trouve que 3 itérations suffisent pour que la suite sorte du cercle. Il essaie $c = [-3/4, 1/10]$, il en faut maintenant 33. Avec $c = [-3/4, 1/100]$, il en faut 315. Avec $c = [-3/4, 1/1\,000]$, il en

faut 3 143. Avec $c = [-3/4, 1/10\,000]$, il en faut 31 417. Avec $c = [-3/4, 1/100\,000]$, il en faut 314 160. Avec $c = [-3/4, 1/1\,000\,000]$, il en faut 3 141 593. Etc.

Stupéfaction ! Les chiffres des nombres calculés sont, à l'exception des derniers, ceux de π écrit en base 10 : 314159... Les calculs à programmer si vous voulez contrôler les affirmations mentionnées sont particulièrement simples. Pour chaque entier k à partir de zéro, définissez la suite de couples de nombres réels (a_n, b_n) :

$a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = -3/4, b_1 = 1/10^k$,
 $a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 - 3/4, b_{n+1} = 2a_n b_n + 1/10^k$
 et déterminez le premier n tel que $a_n^2 + b_n^2$ soit supérieur à 4. Les nombres n calculés seront les nombres 3, 33, 315, 3 143, 31 417, 314 160, 3 141 593, etc.

David Boll découvre aussi que, partant de $(1/4 + c, 0)$ et en prenant des valeurs de c de plus en plus petites (cette fois, il commence par $c = 1/100$ et divise par 100 à chaque nouvel essai), on tombe sur les entiers suivants : 30, 312, 3 140, 31 414, 314 157, etc. À nouveau, c'est π !

Notons que rien, dans la définition de l'ensemble de Mandelbrot, n'a de rapport avec la géométrie du cercle. Pourtant, une simple itération partant d'un nombre choisi de plus en plus petit donne assez rapidement des décimales de π .

Notons aussi que, par cette méthode, calculer 20 décimales de π demanderait plus de 10^{20} itérations, ce qui est la limite de ce qu'on peut espérer faire aujourd'hui, même en mobilisant les plus puissants ordinateurs. Cette méthode, aussi simple et élégante qu'elle soit, ne peut donc pas rivaliser avec les meilleures méthodes connues de calcul de π (mentionnées au tout début de cet article), qui sont plus compliquées mais beaucoup plus efficaces.

Écrit en diagonale par le jeu de la vie

Un exploit de calcul d'une autre nature concernant π est lié au célèbre « jeu de la vie » de John Conway. Ce réseau d'automates cellulaires est l'un des moyens les plus élémentaires de mener des calculs. Chaque case du plan infini, muni d'un