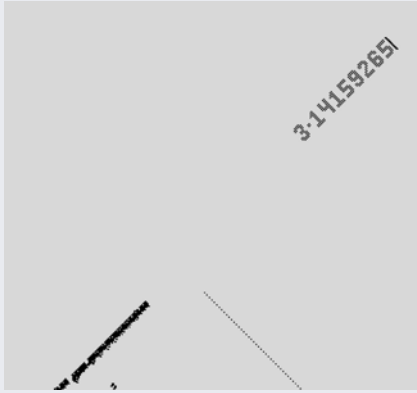


Le jeu de la vie et π

Une fantastique configuration des cellules du jeu de la vie a été conçue par Adam Goucher. En respectant la règle unique de fonctionnement « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 voisins vivants », elle



calcule π . Bien plus surprenant, elle écrit en diagonale le résultat sous la forme d'une configuration stable qui énumère les chiffres décimaux de π . On ne peut pas ici faire apparaître les détails de son million et quelque de cellules vivantes, mais vous pouvez la télécharger (<http://bit.ly/1S7PwJw>) et la faire fonctionner avec le logiciel gratuit Golly (<http://golly.sourceforge.net>).

pas plus que les méthodes de Buffon, du fusil ou de Galperin.

Voici à présent une méthode toute aussi étonnante que les précédentes, mais plus simple encore à mettre en œuvre et qui, elle, pourra plus rapidement donner jusqu'à 5 ou 6 décimales de π .

Caché dans une figure fractale

L'ensemble de Mandelbrot est la plus célèbre des fractales (voir l'encadré page 81). Sa définition, succincte, tient en quelques mots : c'est l'ensemble des points c du plan complexe tels que la suite $c_0 = 0$, $c_1 = c$, $c_2 = c_1^2 + c$, ..., $c_{n+1} = c_n^2 + c$, ... reste dans une partie bornée du plan ; autrement dit, c'est l'ensemble des points c tels que la distance de c_n à 0 ne tend pas vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Si vous n'avez jamais entendu parler du « plan complexe », il suffit, pour comprendre tout ce qui nous occupe ici, de savoir que le carré d'un point de coordonnées (a, b) (représentant le nombre complexe $c = a + ib$) dans le plan complexe est le point de coordonnées $(a^2 - b^2, 2ab)$.

Les outils nécessaires à la visualisation de l'ensemble de Mandelbrot, et surtout les puissances de calcul suffisantes (en chaque

point il faut calculer la suite c_n), ne sont devenus disponibles qu'au début des années 1980. Grâce à quoi on a pris conscience de la richesse de cet ensemble et du découpage infiniment fin de sa frontière. Adrien Douady, de l'université Paris-Sud, et John Hubbard, de l'université Cornell aux États-Unis, ont montré en 1981 que cet ensemble est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant : on peut passer d'un point à un autre de l'ensemble en utilisant un chemin qui y reste tout le temps.

En 1991, Dave Boll, étudiant en informatique à l'université d'État du Colorado, explore l'ensemble de Mandelbrot et tente de savoir si un point unique sépare la partie de cet ensemble à droite du point $c = [-3/4, 0]$ de la partie qui se trouve à sa gauche. Il prend donc des valeurs de c de plus en plus proches du point $[-3/4, 0]$ et calcule combien de points de la suite il faut considérer avant que c_n sorte du cercle de rayon 2. On sait en effet que dès que la suite c_n sort de ce cercle, elle part inévitablement à l'infini.

Il essaie donc comme point de départ $c = [-3/4, 1]$ et trouve que 3 itérations suffisent pour que la suite sorte du cercle. Il essaie $c = [-3/4, 1/10]$, il en faut maintenant 33. Avec $c = [-3/4, 1/100]$, il en faut 315. Avec $c = [-3/4, 1/1000]$, il en

faut 3 143. Avec $c = [-3/4, 1/10000]$, il en faut 31 417. Avec $c = [-3/4, 1/100000]$, il en faut 314 160. Avec $c = [-3/4, 1/1000000]$, il en faut 3 141 593. Etc.

Stupéfaction ! Les chiffres des nombres calculés sont, à l'exception des derniers, ceux de π écrit en base 10 : 314159... Les calculs à programmer si vous voulez contrôler les affirmations mentionnées sont particulièrement simples. Pour chaque entier k à partir de zéro, définissez la suite de couples de nombres réels (a_n, b_n) :

$a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = -3/4, b_1 = 1/10^k$,
 $a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 - 3/4, b_{n+1} = 2a_n b_n + 1/10^k$
 et déterminez le premier n tel que $a_n^2 + b_n^2$ soit supérieur à 4. Les nombres n calculés seront les nombres 3, 33, 315, 3 143, 31 417, 314 160, 3 141 593, etc.

David Boll découvre aussi que, partant de $(1/4 + c, 0)$ et en prenant des valeurs de c de plus en plus petites (cette fois, il commence par $c = 1/100$ et divise par 100 à chaque nouvel essai), on tombe sur les entiers suivants : 30, 312, 3 140, 31 414, 314 157, etc. À nouveau, c'est π !

Notons que rien, dans la définition de l'ensemble de Mandelbrot, n'a de rapport avec la géométrie du cercle. Pourtant, une simple itération partant d'un nombre choisi de plus en plus petit donne assez rapidement des décimales de π .

Notons aussi que, par cette méthode, calculer 20 décimales de π demanderait plus de 10^{20} itérations, ce qui est la limite de ce qu'on peut espérer faire aujourd'hui, même en mobilisant les plus puissants ordinateurs. Cette méthode, aussi simple et élégante qu'elle soit, ne peut donc pas rivaliser avec les meilleures méthodes connues de calcul de π (mentionnées au tout début de cet article), qui sont plus compliquées mais beaucoup plus efficaces.

Écrit en diagonale par le jeu de la vie

Un exploit de calcul d'une autre nature concernant π est lié au célèbre « jeu de la vie » de John Conway. Ce réseau d'automates cellulaires est l'un des moyens les plus élémentaires de mener des calculs. Chaque case du plan infini, muni d'un

quadrillage, est occupée par un microcalculateur qui ne fait qu'une seule chose extrêmement simple :

— Si, à l'instant t , il est dans l'état mort (représenté par la couleur blanche), alors le microcalculateur examine ses 8 voisins ; si 3 exactement sont vivants, il passe dans l'état vivant à l'instant $t + 1$; sinon, il reste dans l'état mort.

— Si, à l'instant t , il est dans l'état vivant (représenté par la couleur noire), alors le microcalculateur examine ses 8 voisins ; si 2 ou 3 sont dans l'état vivant, le calculateur reste dans l'état vivant à l'instant $t + 1$; sinon, il meurt. En résumé : « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 ».

Le pouvoir de calcul d'un tel réseau est bien supérieur à ce que l'on peut imaginer, et d'ailleurs John Conway a montré qu'on pouvait calculer avec cet automate cellulaire tout ce qui est calculable par algorithme. Pour cela, il faut placer au départ la bonne configuration et ne pas être pressé !

En 2010, Adam Goucher, prenant au sérieux le résultat théorique de John Conway, a conçu une configuration du jeu de la vie comportant 1 389 325 cases vivantes. En évoluant génération après génération, la configuration calcule les chiffres de π écrit en base 10 et, c'est le plus étonnant, va les écrire en diagonale à l'aide de cases vivantes déposées qui dessinent les chiffres en écriture habituelle.

L'exploit est inouï, mais, une fois encore, c'est un jeu : au bout de plusieurs heures de fonctionnement avec mon ordinateur, la configuration d'Adam Goucher a réussi à écrire 3,14159265. L'obtention d'autres décimales demanderait des jours ou des semaines. Le calcul utilise un produit infini et progresse en $O(n^6)$, ce qui veut dire que s'il faut k heures de calcul pour avoir n décimales, en avoir le double demandera $2^6 = 64$ fois plus de temps (et cela à la condition que la mémoire disponible sur l'ordinateur ne fasse pas défaut).

Pour terminer, signalons deux méthodes illusoire de calcul de π , parfois présentées comme sérieuses, mais qui en réalité ne vous donneront jamais rien.

La première pourrait être qualifiée de géographique. Dans un article publié dans

la revue *Science* en mars 1996, Hans-Henrik Stølum, de l'université de Cambridge, décrit un modèle d'écoulement des cours d'eau. Il tire de son modèle l'affirmation qu'en moyenne, le rapport entre la longueur d'un fleuve et la distance à vol d'oiseau entre la source et l'endroit où le fleuve se jette à la mer est le nombre π . En se fondant sur ce résultat, on pourrait donc tenter de calculer π en prenant un grand nombre de fleuves, et en calculant la moyenne des rapports entre leur longueur et la distance parcourue à vol d'oiseau entre la source et l'embouchure.

Malheureusement, tous ceux qui, à partir de bases de données géographiques, ont essayé arrivent à des valeurs sensiblement plus petites que π . Il semble bien que le modèle théorique soit inexact, et qu'en tout cas, pour calculer π , on ne tirera rien de la longueur des fleuves.

π n'est tout de même pas partout !

L'autre méthode illusoire est celle liée à la théorie économique de Martin Armstrong. Cet Américain est l'auteur d'une théorie (*Economic Confidence Model*) selon laquelle l'économie est soumise à des ondes cycliques tous les 8,6 ans et que les prendre en compte permet de prévoir les crises. La durée de 8,6 ans correspond à 3 141 jours, soit 1 000 π . On a du mal à comprendre ce que π , avec une précision de 4 chiffres, vient faire dans les cycles économiques, mais Martin Armstrong prétend avoir annoncé, grâce à sa théorie, la crise de 1987 au jour près.

Plus récemment, Martin Armstrong avait annoncé une nouvelle crise pour le 1^{er} octobre 2015. Elle ne s'est pas produite ! Tout cela ne semble pas très sérieux et, si les mathématiciens sont bien persuadés de l'importance et de l'ubiquité de π , ils n'ont pas la naïveté de croire en de telles théories dont, d'ailleurs, aucune justification n'est présentée. C'est un plaisir de jouer avec π et de le découvrir partout, mais c'est avant tout un amusement qu'il est sage de ne pas transformer en superstition numérolgique.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

V. Dumoulin et F. Thouin, *A ballistic Monte Carlo approximation of π* , prépublication arXiv:1404.1499, 2014.

G. Galperin, *Playing pool with π (the number π from a billiard point of view)*, *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 8(4), pp. 375-394, 2003.

A. Klebanoff, *π in the Mandelbrot set*, *Fractals*, vol. 9(4), pp. 393-402, 2001.

H.-H. Stølum, *River meandering as a self-organization process*, *Science*, vol. 271, pp. 1710-1713, 1996.

SUR LE WEB

Dessin animé montrant les 31 chocs de deux billes dont le rapport des masses est 100, 2016 : <https://www.youtube.com/watch?v=4UhpTrHlprk>

Wikipédia, *Aiguille de Buffon*, consulté en 2016 : https://fr.wikipedia.org/wiki/Aiguille_de_Buffon



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr