

## LOGIQUE & CALCUL

### Des stratégies miraculeuses

*Un bon raisonnement, aussi efficace qu'inattendu, peut vous sauver la vie ou vous faire sortir de prison... si vous êtes soumis à une épreuve analogue à celle du problème des 50 prisonniers.*

Jean-Paul DELAHAYE

Certaines énigmes sont si étonnantes que leurs solutions apparaissent miraculeuses. Elles illustrent l'intérêt de l'approche mathématique et logique des problèmes, qui surmonte parfois une apparente impossibilité absolue. Le problème que nous allons présenter avec quelques variantes est de cette catégorie : avant d'en avoir la solution, vous serez probablement persuadé que ce qui est demandé est infaisable.

#### Le problème des 50 prisonniers

Les gardiens d'une prison promettent de libérer leurs 50 prisonniers tous ensemble s'ils réussissent l'épreuve suivante. Les gardiens écrivent les 50 noms des prisonniers sur 50 cartons. Ils placent les cartons au hasard, à raison d'un carton par boîte, dans 50 boîtes fermées et alignées sur une grande table. Les prisonniers sont conduits les uns après les autres devant les boîtes. Sans savoir ce qu'ont fait les prisonniers précédents, chaque prisonnier doit ouvrir 25 des 50 boîtes et y trouver le carton avec son nom. Les prisonniers ne peuvent déplacer ni les boîtes ni les cartons, et doivent refermer les boîtes ouvertes avant de sortir. L'épreuve n'est réussie que si chaque prisonnier trouve son nom. Avant que l'épreuve commence, les prisonniers peuvent se concerter pour convenir d'une méthode, mais une fois l'épreuve commencée, ils n'ont plus aucun échange.

Les prisonniers pourraient procéder au hasard. Par exemple, ils pourraient utiliser une loterie à 50 numéros : chaque prisonnier lancerait la loterie autant de fois qu'il le faut, et ouvrirait la boîte indiquée par la loterie (sans tenir compte des numéros tombés plusieurs fois), cela jusqu'à avoir ouvert 25 boîtes. Chacun aurait une chance sur deux de réussir, et puisque les tirages seraient indépendants, la probabilité qu'ils réussissent tous serait exactement  $1/2^{50} = 8,881 \times 10^{-16}$ , ce qui est vraiment très peu !

Ils peuvent faire beaucoup mieux et avoir une probabilité de réussite collective supérieure à 30 %. Comment ?

Le problème, sous diverses formes, est connu depuis 2003. Il a été proposé par les chercheurs danois en informatique Peter Bro Miltersen et Anna Gál, qui étaient persuadés que lorsque le nombre de boîtes augmente (il y a  $2n$  prisonniers et  $2n$  boîtes, chaque prisonnier pouvant ouvrir  $n$  boîtes), la probabilité de gagner tend vers 0. Leur collègue Sven Skyum les convainquit de leur erreur et leur montra que pour tout  $n$ , les prisonniers disposent d'une méthode qui leur garantit la liberté dans plus de 30 % des cas.

Prenez la peine de chercher cette méthode. Quelle est donc cette stratégie de jeu qui semble réaliser un miracle ?

Notez bien qu'il n'y a aucun doute sur l'affirmation qu'un prisonnier seul a exactement une chance sur deux de réussir à trouver son nom. En effet, les noms sont mis au hasard dans les boîtes et il en ouvre la moitié sans avoir la moindre information sur l'ordre des cartons dans les boîtes. Les

prisonniers ne pouvant pas communiquer une fois l'épreuve commencée, il semble qu'ils ne peuvent que jouer au hasard indépendamment et, en conséquence, que rien ne leur permet d'avoir collectivement mieux que ce que donne la stratégie *Au hasard* qui aboutit à une chance sur  $2^{50}$  de réussir. Cependant, ce raisonnement est faux : s'ils sont malins, les prisonniers trouveront tous leur nom dans plus de 30 % des cas.

#### Perdre ou gagner tous en même temps !

L'idée est que les prisonniers doivent trouver un moyen de se coordonner. Il faut qu'ils s'arrangent pour perdre souvent en même temps, s'ils veulent pouvoir souvent gagner tous en même temps. Les prisonniers ne peuvent pas communiquer, mais ils peuvent adopter des comportements corrélés et, par conséquent (et c'est là que se trouve l'erreur du raisonnement qui semblait prouver qu'on ne peut pas faire mieux que la stratégie *Au hasard*), ils peuvent faire des choix liés.

Pour expliquer la solution, nous supposons que les noms des prisonniers sont les entiers de 1 à 50, ce qui bien sûr ne change rien au problème.

Les prisonniers opèrent de la façon suivante. Quand un prisonnier se trouve devant les boîtes, il ouvre celle correspondant à son numéro : le prisonnier numéro 1 ouvre la boîte placée au début de la ligne de boîtes, le prisonnier numéro 2 ouvre la deuxième boîte, etc. Si le prisonnier trouve son numéro dans la boîte qu'il ouvre, il s'arrête. S'il ne

## Problème des 50 prisonniers : la procédure et la solution *Suivre*

**C**inquante prisonniers numérotés de 1 à 50 passent les uns après les autres devant une grande table où sont alignées 50 boîtes. Ils ne peuvent pas communiquer et ignorent ce qu'ont fait les prisonniers passés avant eux.

Les gardiens de la prison ont déposé au hasard des cartons numérotés de 1 à 50 dans les 50 boîtes, en mettant exactement un carton par boîte. Chaque prisonnier ouvre 25 boîtes de son choix et les referme sans toucher aux cartons qui s'y trouvent. L'ensemble des prisonniers gagne et ils sont libérés si chacun d'eux a ouvert la boîte contenant son numéro.

En jouant au hasard, les prisonniers réussiraient dans 1 cas sur  $2^{50}$  (car chacun aura dans ce cas une chance sur deux de trouver son numéro). Ils peuvent faire beaucoup mieux et gagner dans plus de 30 % des cas. Comment ?

En appliquant la stratégie *Suivre* (illustration ci-dessous), les  $2n$  prisonniers gagnent si la permutation définie par la distribution des cartons dans les boîtes ne contient pas un cycle de taille supérieure à  $n$ . Le raisonnement mathématique montre que cela se produit pour une proportion de permutations égale à  $1 - 1/(n+1) - 1/(n+2) - \dots - 1/(2n)$ .

Avec 4 prisonniers, on a  $4! = 24$  permutations possibles. Les répartitions de cycles sont :

### A. Quatre cycles de taille 1

1 permutation :  $[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4]$ .

### B. Un cycle de taille 2 et deux de taille 1

6 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4]$

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3]$ .

### C. Deux cycles de taille 2

3 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1]$ .

### D. Un cycle de taille 3 et un cycle de taille 1

8 permutations :

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3]$

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4]$ .

### E. Un cycle de taille 4

6 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3]$ .

On a bien 24 permutations. Le nombre de permutations permettant de gagner est  $10 = 1 + 6 + 3$  (cas A, B et C). La probabilité de gagner est bien de  $10/24 = 1 - 1/3 - 1/4$ .

