

Problème des 50 prisonniers : la procédure et la solution *Suivre*

Cinquante prisonniers numérotés de 1 à 50 passent les uns après les autres devant une grande table où sont alignées 50 boîtes. Ils ne peuvent pas communiquer et ignorent ce qu'ont fait les prisonniers passés avant eux. Les gardiens de la prison ont déposé au hasard des cartons numérotés de 1 à 50 dans les 50 boîtes, en mettant exactement un carton par boîte. Chaque prisonnier ouvre 25 boîtes de son choix et les referme sans toucher aux cartons qui s'y trouvent. L'ensemble des prisonniers gagne et ils sont libérés si chacun d'eux a ouvert la boîte contenant son numéro.

En jouant au hasard, les prisonniers réussiraient dans 1 cas sur 2^{50} (car chacun aura dans ce cas une chance sur deux de trouver son numéro). Ils peuvent faire beaucoup mieux et gagner dans plus de 30 % des cas. Comment ?

En appliquant la stratégie *Suivre* (illustration ci-dessous), les $2n$ prisonniers gagnent si la permutation définie par la distribution des cartons dans les boîtes ne contient pas un cycle de taille supérieure à n . Le raisonnement mathématique montre que cela se produit pour une proportion de permutations égale à $1 - 1/(n+1) - 1/(n+2) - \dots - 1/(2n)$.

Avec 4 prisonniers, on a $4! = 24$ permutations possibles. Les répartitions de cycles sont :

A. Quatre cycles de taille 1

1 permutation : $[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4]$.

B. Un cycle de taille 2 et deux de taille 1

6 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4]$

$[1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4]$

$[1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3]$

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4]$

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3]$.

C. Deux cycles de taille 2

3 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3]$

$[1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1]$.

D. Un cycle de taille 3 et un cycle de taille 1

8 permutations :

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3]$

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4]$.

E. Un cycle de taille 4

6 permutations :

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1]$

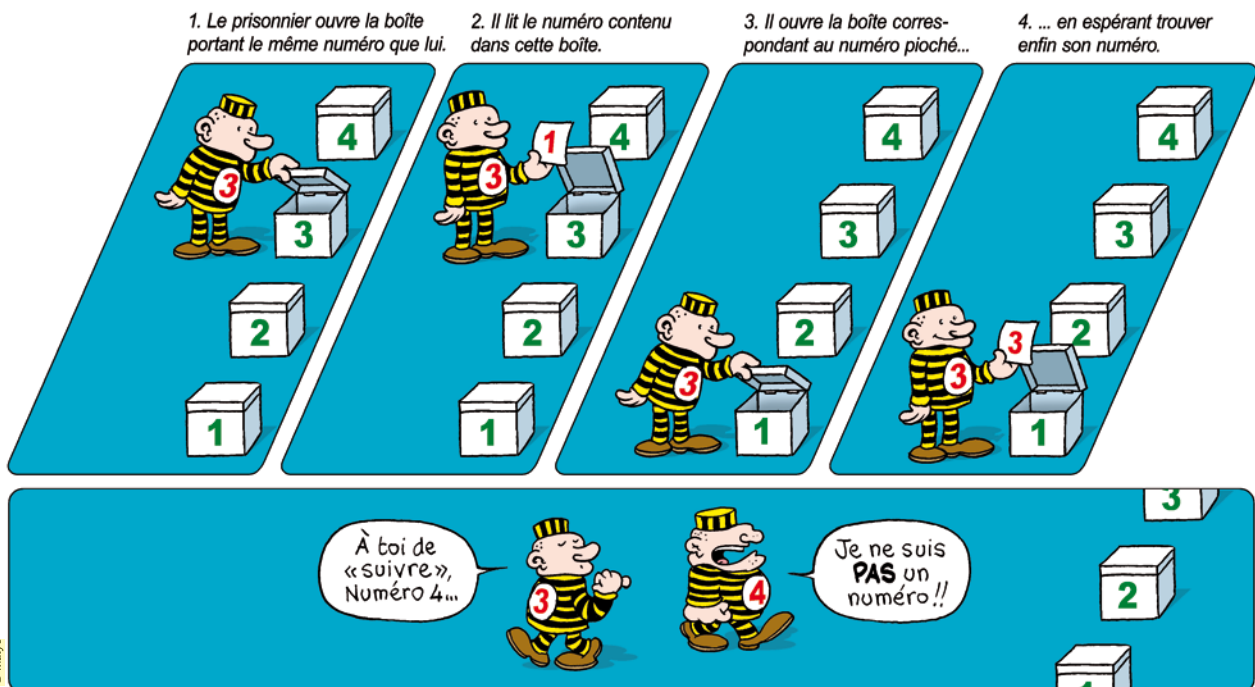
$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1]$

$[1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2]$

$[1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3]$.

On a bien 24 permutations. Le nombre de permutations permettant de gagner est $10 = 1 + 6 + 3$ (cas A, B et C). La probabilité de gagner est bien de $10/24 = 1 - 1/3 - 1/4$.



Une inégalité démontrée par un dessin

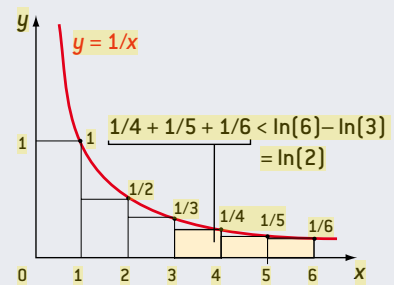
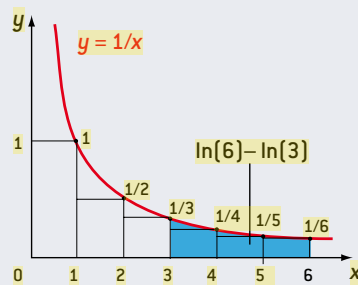
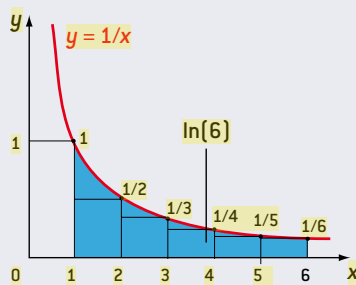
Pour prouver que, en adoptant la stratégie *Suivre*, les prisonniers ont une probabilité de gagner supérieure à $1 - \ln(2) = 0,306852\dots$, on utilise le fait que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$1 - [1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n)] > 1 - \ln(2).$$

Cette inégalité est équivalente à : $1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n) < \ln(2)$.
Donnons une preuve graphique de ce

résultat pour $n=3$, clairement généralisable à tout entier $n \geq 2$. Le logarithme népérien de t , noté $\ln(t)$, est défini pour

tout t positif comme l'aire comprise entre l'axe des x et l'hyperbole d'équation $y = 1/x$, entre l'abscisse 1 et l'abscisse t . Cela permet de visualiser $\ln(6)$ et $\ln(3)$, puis, par soustraction, $\ln(6) - \ln(3) = \ln(2)$. Les petits rectangles en jaune ont une aire qui vaut $1/4 + 1/5 + 1/6$. Puisque l'aire en jaune est contenue dans l'aire en bleu, on a : $1/4 + 1/5 + 1/6 < \ln(6) - \ln(3) = \ln(2)$.



$$\ln(2) = \ln(2n) - \ln(n) > 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n)$$

le trouve pas, il ouvre la boîte correspondant au numéro trouvé dans la boîte qu'il vient d'ouvrir. S'il trouve son numéro dans cette seconde boîte, il s'arrête. Sinon, il continue de la même façon : il va ouvrir la boîte correspondant au numéro qu'il vient de trouver dans la dernière boîte ouverte, et continue jusqu'à avoir ouvert 25 boîtes. Cette stratégie est la stratégie *Suivre*.

Pourquoi la stratégie *Suivre* fonctionne-t-elle ? L'explication se résume ainsi : en adoptant la stratégie *Suivre*, un prisonnier trouvera son numéro, sauf si le cycle auquel appartient son numéro dans la décomposition en cycles de la permutation des boîtes définie par les cartons qu'elles contiennent est de longueur (on dit aussi : ordre) supérieure à 25. Et les prisonniers qui adoptent tous la stratégie *Suivre* gagneront si la décomposition en cycles de la permutation ne comporte pas de cycle de longueur supérieure à 25, ce qui se produit dans plus de 30 % des cas.

Avant de justifier cette probabilité, examinons les permutations, cycles et décomposition en cycles. Une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, p\}$ (p étant un entier positif) est une application bijective f (ou dite

aussi biunivoque ou « un à un ») de l'ensemble vers lui-même. Cette application f vérifie deux propriétés : si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$ (propriété A) ; pour tout c entre 1 et p , il existe un unique a tel que $f(a) = c$ (propriété B).

Les cartons portant les numéros mis dans les boîtes définissent une telle permutation, car il y en a exactement un par boîte. Si l'on a par exemple 6 prisonniers ($n=3$) et que les cartons sont mis dans l'ordre 2-4-5-1-3-6, l'application bijective f est celle qui à 1 associe 2, à 2 associe 4, à 3 associe 5, à 4 associe 1, à 5 associe 3, et à 6 associe 6 : $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 5, f(4) = 1, f(5) = 3, f(6) = 6$.

Pas de cycles trop longs dans la permutation

Observons le prisonnier 1 qui applique la stratégie *Suivre* : il ouvre la boîte 1 et y trouve le carton 2 ; il ouvre donc la boîte 2 où il trouve le carton 4 ; il ouvre donc la boîte 4 où il trouve le carton 1. Il s'arrête, il a réussi. Le prisonnier 2, lui, tombe sur 4, puis 1, puis 2. Il réussit aussi. On vérifie que tous les prisonniers réussissent, car la stratégie *Suivre* les envoie dans le cycle $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ou $2 \rightarrow 4$

pour les prisonniers 1, 2 et 4, dans le cycle $3 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ pour les prisonniers 3 et 5, et dans le cycle $6 \rightarrow 6$ pour le prisonnier 6.

La permutation considérée ici se décompose en trois cycles de longueurs respectives 3, 2 et 1. Ce type de décompositions en cycles est général : toute permutation d'un ensemble fini dans lui-même se décompose en un nombre fini de cycles.

Pour le démontrer, c'est assez simple. En partant de x et en suivant les entiers successifs $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$, on finit par retomber sur un entier y déjà obtenu, car il n'y a qu'un nombre fini d'entiers considérés par la permutation. Considérons le premier entier y déjà obtenu sur lequel on retombe. C'est nécessairement x , car si c'était un autre entier, celui-ci serait obtenu de deux façons différentes (par l'entier qui a donné y la première fois, et par celui qui y amène la deuxième fois), ce qui est impossible puisque f étant bijective, tout élément n'a qu'un seul antécédent (propriété B). Tout entier x appartient donc à un cycle. La permutation se décompose ainsi en plusieurs cycles, qui sont bien sûr disjoints, et qui sont tels que la somme de leur taille (le nombre de leurs éléments) est p .