

Dans notre histoire des 50 prisonniers, si tous utilisent la stratégie *Suivre*, alors ils gagnent quand il n'y a aucun cycle de longueur supérieure à 25. S'il existe un cycle de longueur 50, ils perdent tous. Dans les autres cas, par exemple si on a un cycle de longueur 30 et d'autres cycles (nécessairement de longueur inférieure à $20 = 50 - 30$), il y aura autant de prisonniers perdants que d'éléments du plus grand cycle, et les prisonniers perdront collectivement (voir l'encadré page 79, qui détaille le cas de 4 prisonniers). Le problème se ramène donc à calculer combien de permutations de l'ensemble à 50 éléments ont un cycle de longueur supérieure à 25.

La probabilité de gagner des 50 prisonniers

Nous allons montrer que la probabilité qu'une permutation des entiers $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ne contienne pas de cycle de longueur supérieure à n est supérieure à $1 - \ln(2)$ (où $\ln$ désigne le logarithme népérien), soit 0,306852... Cela montrera que la probabilité que les prisonniers gagnent est supérieure à 30 %.

Soit k un entier tel que $n < k \leq 2n$. Évaluons le nombre de permutations ayant un cycle d'ordre k parmi les $(2n)!$ permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Il y a $C(2n, k) = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}$ façons de choisir les entiers du cycle. Le nombre $C(2n, k)$ est le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi $2n$. Il y a $(k-1)!$ façons d'ordonner les k entiers choisis en un cycle, et il y a $(2n-k)!$ façons de classer les autres entiers pour déterminer la permutation. Le nombre total de permutations de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ayant un cycle d'ordre k supérieur à n est donc : $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \times (k-1)! \times (2n-k)! = \frac{(2n)!}{k} \times \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Il s'ensuit que la probabilité de tomber sur une permutation ayant un cycle d'ordre k est $1/k$.

Par conséquent, la probabilité qu'il n'y ait aucun cycle d'ordre k supérieur à n est $1 - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] = 1 - H(2n) + H(n)$, où $H(i) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i}$. On sait que $H(i)$ vaut à peu de chose près $\ln(i)$. La probabilité recherchée vaut donc approximativement $1 - \ln(2n) + \ln(n) = 1 - \ln(2) = 0,306852...$

Démonstration d'optimalité

La magnifique démonstration qui suit est due à Eugene Curtin et Max Warshauer. Elle prouve qu'il est impossible de faire mieux que la stratégie *Suivre*. Nous considérons une variante du jeu où les prisonniers procèdent comme pour le jeu initial, mais s'arrêtent d'ouvrir des boîtes quand ils ont trouvé leur numéro (cela ne les désavantage pas), et, surtout, ne referment pas les boîtes ouvertes.

Le prisonnier p bénéficie donc des informations données par les boîtes ouvertes par les prisonniers $1, 2, \dots, p-1$. Cette variante rend le jeu plus facile, et donc la meilleure stratégie de jeu pour cette variante conduira à une probabilité de gagner supérieure ou égale à celle de la meilleure façon de jouer pour le jeu initial.

Jouer à cette variante équivaut à ne considérer qu'un prisonnier qui ouvre les $2n$ boîtes dans un certain ordre et qui s'arrête une première fois au bout de a_1 boîtes quand il a trouvé la boîte contenant le carton 1, puis une seconde fois après avoir ouvert a_2 boîtes quand il a trouvé le carton 2, etc. Le prisonnier a gagné si aucun des nombres a_i n'est supérieur à n .

Comme les contenus des boîtes ont été choisis au hasard par les gardiens, l'ordre d'ouverture qu'utilise le prisonnier de la variante est sans importance : toutes les façons d'ouvrir les boîtes donnent la même probabilité générale de gagner. On peut donc supposer que le prisonnier de la variante ouvre simplement les boîtes dans l'ordre où elles se présentent sur la table. Calculer sa probabilité de gagner sous cette hypothèse donnera la probabilité la meilleure de gagner pour la variante.

Prenons le cas $n=3$, $2n=6$. Les boîtes contiennent les cartons 6-1-2-4-3-5, dans cet ordre. Le prisonnier ouvre d'abord les boîtes contenant le 6 et le 1 (il cherche le 1). Donc $a_1=2$. Puis la boîte contenant le 2 (il cherche le 2) : $a_2=1$. Puis les boîtes contenant le 4 et le 3 (il cherche le 3) : $a_3=2$. Pour le 4, il n'ouvre aucune nouvelle boîte, puisque le carton 4 est déjà trouvé : $a_4=0$. Il ouvre ensuite les boîtes contenant le 5 (il cherche le 5) : $a_5=1$. Pour le 6, il n'ouvre aucune boîte nouvelle : $a_6=0$. Le prisonnier gagne, car à aucun moment il n'a eu plus de

3 boîtes à ouvrir pour trouver le carton suivant (chaque a_i est inférieur à 3).

Nous noterons $[6, 1][2][4, 3][5]$ cette séquence d'ouverture des boîtes. Une séquence de jeu perdante serait par exemple $[1][3, 4, 5, 2][6]$: la deuxième recherche oblige le joueur à ouvrir 4 boîtes.

La notation adoptée pour représenter les séquences possibles pourrait être utilisée pour représenter la décomposition en cycles d'une permutation. La séquence $[6, 1][2][4, 3][5]$ représenterait ainsi la permutation qui envoie 1 sur 6 et 6 sur 1, envoie 2 sur 2, envoie 4 sur 3 et 3 sur 4, et envoie 5 sur 5 (cette notation est la « forme canonique » de la permutation, voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Permutation>).

À chaque séquence de jeu de la variante correspond exactement une permutation en forme canonique et réciproquement. Il y a donc exactement autant de séquences de jeux gagnantes que de permutations dépourvues de cycles d'ordre strictement supérieur à n , c'est-à-dire $1 - H(2n) + H(n)$, où $H(i) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i}$ (voir le calcul effectué dans le texte ci contre). La meilleure façon de jouer à la variante du jeu, plus facile que le jeu initial, gagne donc avec une probabilité égale à celle de gagner pour les prisonniers du jeu initial appliquant la stratégie *Suivre*. La meilleure façon de jouer au jeu initial ne peut donc pas dépasser ce nombre. La stratégie *Suivre* obtient ainsi une probabilité de succès impossible à améliorer.



Les deux énigmes de Roland Yéléhada

Voici deux petits problèmes ressemblant au problème des 50 prisonniers. Ils présentent la propriété suivante, qui en fait l'intérêt : la meilleure stratégie pour les prisonniers n'est ni la stratégie *Au hasard* ni la stratégie *Suivre*. La question posée est à chaque fois : quelle est la meilleure stratégie pour les prisonniers ?

Problème 1. Il y a six prisonniers, et chacun peut ouvrir 2 boîtes. Ils sont libérés si trois au moins trouvent leur numéro.

Problème 2. Il y a six prisonniers, et chacun peut ouvrir 2 boîtes. Ils sont libérés si deux au moins trouvent leur numéro.

Commençons par le problème 2, qui est facile. Si les prisonniers utilisent la stratégie *Au hasard* (chaque prisonnier ouvre au hasard 2 boîtes différentes), ils perdront si aucun des 6 prisonniers ne trouve son numéro, $(4/6)^6$, ou si 5 ne le trouvent pas $6 \times (2/6) \times (4/6)^5$, ce qui fait au total une probabilité de perdre égale à 35,11 %. S'ils utilisent la stratégie *Suivre*, l'examen des 720 permutations (c'est fastidieux, mais on y arrive) montre qu'il y a 304 mauvais cas sur

les 720. Les prisonniers ont donc 42 % de chance d'échouer. C'est pire que jouer au hasard, ce qui montre que *Suivre* n'est pas toujours intéressante. Pourtant, ils peuvent gagner dans 100 % des cas : chacun ouvre la boîte 1 et la boîte 2. Nécessairement, le prisonnier 1 trouve son numéro, et de même pour le prisonnier 2. C'était un piège !

Le problème 1 est plus difficile. La stratégie *Au hasard* (chaque prisonnier ouvre au hasard 2 boîtes différentes) fait perdre si 4, 5 ou 6 prisonniers ne trouvent pas leur numéro. Le calcul donne une probabilité de $(2/3)^6 + 6(1/3)(2/3)^5 + 15(1/3)^2(2/3)^4 = 68,03$ % d'échouer. J'ai vérifié ce résultat en faisant un programme. La stratégie *Suivre* donne un bon nombre de cas défavorables.

Avec un peu de patience ou un programme, on trouve qu'il y en a 484 sur les 720 et donc que la probabilité d'échouer est $484/720 = 67,22$ %. Notons que la stratégie *Chacun ouvre les boîtes 1 et 2* donne 100 % de chance d'échouer. La ruse précédente ne marche plus !

Une étude de nombreuses stratégies (à la main ou en utilisant des programmes) conduit à découvrir plusieurs stratégies qui limitent la probabilité d'échec à 66,66 % (c'est-à-dire 2/3). Voici l'une d'elles, meilleure donc que les stratégies *Au hasard* et *Suivre* : « Le prisonnier 1 ouvre les boîtes 1 et 2, le prisonnier 2 ouvre 2 et 4, le prisonnier 3 ouvre 3 et 6, le prisonnier 4 ouvre 1 et 2, le prisonnier 5 ouvre 2 et 4, le prisonnier 6 ouvre 3 et 6. »

Quel est le secret de cette coordination étrange qui fait mieux que le hasard et *Suivre* ? Peut-on faire encore mieux ? On l'ignore encore aujourd'hui. Un lecteur pourra-t-il répondre ?

L'examen détaillé des inégalités montre que $1 - \ln(2)$ est une valeur par défaut de la probabilité cherchée, et donc que celle-ci est supérieure à 0,306852... [voir l'encadré page 80].

Ainsi, les prisonniers ont une probabilité de réussir supérieure à 30,6852 %. Dans notre problème, on peut calculer directement cette probabilité [donc sans avoir à s'occuper d'approximation]. Elle vaut : $1 - (1/26 + 1/27 + \dots + 1/50) = 0,31675283...$

L'idée qui explique le miracle est, répétions-le, que lorsque la permutation choisie a un cycle plus long que n , les prisonniers dont le numéro appartient à ce cycle se trompent tous. Le fait pour les prisonniers de perdre ensemble en grand nombre est l'exact inverse d'un choix au hasard qui rend indépendants les échecs des prisonniers. En concentrant les cas où ils perdent, ils concentrent les cas où ils gagnent, car chacun gagne exactement une fois sur deux (il ne peut individuellement ni faire mieux ni faire moins bien). Au mieux, cette concentration des cas gagnants pourrait donner

une probabilité de réussite de 50 % (s'il n'y avait que des cas où tous sont perdants ou tous sont gagnants). Le 50 % est impossible, car on a démontré que la stratégie *Suivre* est la meilleure façon de jouer [voir l'encadré page 81] : il faut se contenter de 31,67 %.

Gagner une fois sur deux ?

Indiquons quelques résultats complémentaires sur ce jeu. On pourrait considérer que 30 % est un peu faible. Il serait plus sympathique de permettre aux prisonniers de gagner dans un cas sur deux. Pour cela, il faut que chacun puisse ouvrir un peu plus de 50 % des boîtes. Quelle proportion ? Un petit calcul montre que la proportion donnant 50 % est $1/\sqrt{e} = 0,606530...$ quand n tend vers l'infini. Dans le cas de 50 prisonniers, si l'on autorise chacun à ouvrir 30 boîtes, ils gagneront (en utilisant la stratégie *Suivre*) dans 49,57 % des cas. Si chacun peut ouvrir 31 boîtes, ils gagneront dans 52,80 % des cas.

L'intérêt de cette énigme tient aussi à ce qu'elle a permis d'en imaginer quelques autres. Bien entendu, la connaissance de la solution de la première énigme sera un avantage pour résoudre les autres. En voici une dont l'énoncé se présente assez différemment. Elle m'a été proposée par Elie Cattan.

On n'a que deux prisonniers. Les 50 boîtes contiennent des numéros de 1 à 50. Comme dans le problème précédent, les deux prisonniers peuvent convenir d'une stratégie avant l'épreuve, mais ne peuvent communiquer une fois celle-ci commencée. Le premier prisonnier entre dans la pièce, regarde le contenu de toutes les boîtes et, s'il le désire, inverse le contenu de deux boîtes, et seulement deux. Il sort. Le second prisonnier entre alors dans la pièce, les gardiens de la prison lui assignent un numéro tiré au hasard entre 1 et 50, et il doit trouver ce numéro en ouvrant au maximum 25 boîtes. S'il trouve le numéro qui lui a été donné, les deux prisonniers sont libérés, sinon ils restent en prison.

Encore une fois, le problème défie l'entendement, car on a du mal à comprendre la

stratégie que pourrait adopter le premier prisonnier sans avoir connaissance du numéro qui va être attribué au second. Pourtant, s'ils sont malins, les deux prisonniers sont sûrs (à 100 %) d'être sauvés. Voici comment faire.

Le premier prisonnier, qui a une connaissance complète de la permutation f définie par la disposition des cartons dans les boîtes, examine ses cycles. Si tous ont 25 éléments ou moins, il ne fait rien. Si l'un des cycles est d'ordre 26 ou plus (il ne peut en exister qu'un seul), il va le casser.

Pour ce faire, il prend un élément du cycle, par exemple 1, et suit les cartons comme quand on applique la stratégie *Suivre*. Il va donc à la boîte 1, puis à la boîte $f(1)$, puis à la boîte $f(f(1))$, etc. Il repère la 25^e boîte du cycle, puis continue jusqu'à trouver le carton 1 dans la boîte k ($k > 25$). Il échange les cartons de la 25^e boîte ouverte et de la boîte ouverte la k -ième fois. En faisant cela, le cycle auquel appartient 1 a maintenant pour longueur 25 (car la 25^e boîte ramène en 1). La permutation obtenue après l'échange des cartons n'a donc aucun cycle de taille supérieure à 25. Le prisonnier 2, en appliquant la stratégie *Suivre* à partir de la boîte k , sera ainsi certain de trouver le carton k qu'on lui aura demandé, et ce quel que soit k .

D'une énigme à l'autre

La variante suivante se présente très simplement et n'implique que très peu de personnages. Inspirée du problème du Monty Hall, elle a été proposée par Adam Landsberg, du Scripps College, aux États-Unis, et Eric Grundwald, de Londres.

Un jeu télévisé est organisé. Trois rideaux sont disposés sur la scène. L'un cache une voiture, un autre une clé, et le troisième rideau un appareil GPS. On ne sait pas dans quel ordre sont disposés les trois objets, et cet ordre a été choisi au hasard. Trois membres d'une même famille sont invités à jouer. Le premier pourra regarder derrière deux des rideaux et il doit trouver la voiture. Le second pourra regarder derrière deux des rideaux et devra trouver la clé de la voiture. Le troisième, toujours en observant derrière deux rideaux, devra trouver le GPS. Les joueurs jouent les uns après les autres, sans savoir

ce qu'ont fait et vu ceux déjà passés. Ils gagnent et emportent la voiture, la clé et le GPS si chacun a trouvé ce qu'il devait trouver. En jouant au hasard, ils gagnent dans $(2/3)^3 = 29,629\%$ des cas. Pourtant, en s'y prenant bien, ils pourraient gagner dans $2/3$ des cas, soit avec une probabilité de 66,66 %. Comment ?

Ils appliquent la stratégie *Suivre* en convenant d'un ordre entre les joueurs (celui qui doit trouver la voiture est le 1, celui qui doit trouver la clé est le 2, et celui qui doit trouver le GPS est le 3) et d'un ordre des éléments à trouver (la voiture est le 1, la clé le 2, le GPS le 3). La disposition des cadeaux derrière les rideaux définit une permutation f de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même. La probabilité de perdre correspond alors au rapport entre le nombre de permutations f ayant un cycle de taille 3 et le nombre total de permutations de 3 éléments, c'est-à-dire $3! = 6$.

On peut appliquer le raisonnement général considéré plus haut (il conclut que la probabilité de perdre est $1 - 1/3$), mais un raisonnement direct est possible. En effet, les 6 permutations de 3 éléments sont : $(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3)$, $(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3)$, $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$, $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1)$. Deux d'entre elles ont un cycle de taille 3 : $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$ et $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2)$. Les autres n'ont que des cycles d'ordre 1 ou 2. Les joueurs gagneront donc dans $2/3$ des cas.

Deux variantes à 6 prisonniers ont été proposées récemment par Roland Yéléhada, (voir l'encadré page ci-contre). Les deux problèmes ont la propriété suivante qui vous forcera à réfléchir : ni la stratégie *Au hasard* ni la stratégie *Suivre* ne sont les meilleures. Attention, l'un des deux problèmes est facile et l'autre beaucoup moins.

Dans le monde physique, les miracles sont légion (une télévision, une voiture ou un smartphone seraient des objets magiques pour un homme du XV^e siècle). Dans le monde mathématique, certains miracles se produisent et ce qu'un raisonnement approximatif semblait éliminer définitivement (on ne pourrait faire mieux que la stratégie *Au hasard*) se révèle erroné pour le chercheur astucieux. De tels moments font le bonheur des mathématiciens.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

Wikipedia, **100 prisoners problem**, https://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem

E. Grundwald, **Re: The locker puzzle**, *Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), p. 1, 2010.

A. S. Landsberg, **The return of Monty Hall**, *Mathematical Intelligencer*, vol. 31(2), p. 1, 2009.

A. Gál et P. Bro Miltersen, **The cell probe complexity of succinct data structures**, *Theoretical Computer Science*, vol. 379(3), pp. 405-417, 2007.

E. Curtin et M. Warshauer, **The locker puzzle**, *Mathematical Intelligencer*, vol. 28, pp. 28-31, 2006.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr