

stratégie que pourrait adopter le premier prisonnier sans avoir connaissance du numéro qui va être attribué au second. Pourtant, s'ils sont malins, les deux prisonniers sont sûrs (à 100 %) d'être sauvés. Voici comment faire.

Le premier prisonnier, qui a une connaissance complète de la permutation f définie par la disposition des cartons dans les boîtes, examine ses cycles. Si tous ont 25 éléments ou moins, il ne fait rien. Si l'un des cycles est d'ordre 26 ou plus (il ne peut en exister qu'un seul), il va le casser.

Pour ce faire, il prend un élément du cycle, par exemple 1, et suit les cartons comme quand on applique la stratégie *Suivre*. Il va donc à la boîte 1, puis à la boîte $f(1)$, puis à la boîte $f(f(1))$, etc. Il repère la 25^e boîte du cycle, puis continue jusqu'à trouver le carton 1 dans la boîte k ($k > 25$). Il échange les cartons de la 25^e boîte ouverte et de la boîte ouverte la k -ième fois. En faisant cela, le cycle auquel appartient 1 a maintenant pour longueur 25 (car la 25^e boîte ramène en 1). La permutation obtenue après l'échange des cartons n'a donc aucun cycle de taille supérieure à 25. Le prisonnier 2, en appliquant la stratégie *Suivre* à partir de la boîte k , sera ainsi certain de trouver le carton k qu'on lui aura demandé, et ce quel que soit k .

D'une énigme à l'autre

La variante suivante se présente très simplement et n'implique que très peu de personnages. Inspirée du problème du Monty Hall, elle a été proposée par Adam Landsberg, du Scripps College, aux États-Unis, et Eric Grundwald, de Londres.

Un jeu télévisé est organisé. Trois rideaux sont disposés sur la scène. L'un cache une voiture, un autre une clé, et le troisième rideau un appareil GPS. On ne sait pas dans quel ordre sont disposés les trois objets, et cet ordre a été choisi au hasard. Trois membres d'une même famille sont invités à jouer. Le premier pourra regarder derrière deux des rideaux et il doit trouver la voiture. Le second pourra regarder derrière deux des rideaux et devra trouver la clé de la voiture. Le troisième, toujours en observant derrière deux rideaux, devra trouver le GPS. Les joueurs jouent les uns après les autres, sans savoir

ce qu'ont fait et vu ceux déjà passés. Ils gagnent et emportent la voiture, la clé et le GPS si chacun a trouvé ce qu'il devait trouver. En jouant au hasard, ils gagnent dans $(2/3)^3 = 29,629\%$ des cas. Pourtant, en s'y prenant bien, ils pourraient gagner dans $2/3$ des cas, soit avec une probabilité de 66,66 %. Comment ?

Ils appliquent la stratégie *Suivre* en convenant d'un ordre entre les joueurs (celui qui doit trouver la voiture est le 1, celui qui doit trouver la clé est le 2, et celui qui doit trouver le GPS est le 3) et d'un ordre des éléments à trouver (la voiture est le 1, la clé le 2, le GPS le 3). La disposition des cadeaux derrière les rideaux définit une permutation f de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même. La probabilité de perdre correspond alors au rapport entre le nombre de permutations f ayant un cycle de taille 3 et le nombre total de permutations de 3 éléments, c'est-à-dire $3! = 6$.

On peut appliquer le raisonnement général considéré plus haut (il conclut que la probabilité de perdre est $1 - 1/3$), mais un raisonnement direct est possible. En effet, les 6 permutations de 3 éléments sont : $(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3)$, $(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3)$, $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$, $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1)$. Deux d'entre elles ont un cycle de taille 3 : $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$ et $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2)$. Les autres n'ont que des cycles d'ordre 1 ou 2. Les joueurs gagneront donc dans $2/3$ des cas.

Deux variantes à 6 prisonniers ont été proposées récemment par Roland Yéléhada, (voir l'encadré page ci-contre). Les deux problèmes ont la propriété suivante qui vous forcera à réfléchir : ni la stratégie *Au hasard* ni la stratégie *Suivre* ne sont les meilleures. Attention, l'un des deux problèmes est facile et l'autre beaucoup moins.

Dans le monde physique, les miracles sont légion (une télévision, une voiture ou un smartphone seraient des objets magiques pour un homme du XV^e siècle). Dans le monde mathématique, certains miracles se produisent et ce qu'un raisonnement approximatif semblait éliminer définitivement (on ne pourrait faire mieux que la stratégie *Au hasard*) se révèle erroné pour le chercheur astucieux. De tels moments font le bonheur des mathématiciens.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

Wikipedia, 100 prisoners problem, https://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem

E. Grundwald, Re: The locker puzzle, *Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), p. 1, 2010.

A. S. Landsberg, The return of Monty Hall, *Mathematical Intelligencer*, vol. 31(2), p. 1, 2009.

A. Gál et P. Bro Miltersen, The cell probe complexity of succinct data structures, *Theoretical Computer Science*, vol. 379(3), pp. 405-417, 2007.

E. Curtin et M. Warshauer, The locker puzzle, *Mathematical Intelligencer*, vol. 28, pp. 28-31, 2006.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr