

stratégie que pourrait adopter le premier prisonnier sans avoir connaissance du numéro qui va être attribué au second. Pourtant, s'ils sont malins, les deux prisonniers sont sûrs (à 100 %) d'être sauvés. Voici comment faire.

Le premier prisonnier, qui a une connaissance complète de la permutation f définie par la disposition des cartons dans les boîtes, examine ses cycles. Si tous ont 25 éléments ou moins, il ne fait rien. Si l'un des cycles est d'ordre 26 ou plus (il ne peut en exister qu'un seul), il va le casser.

Pour ce faire, il prend un élément du cycle, par exemple 1, et suit les cartons comme quand on applique la stratégie *Suivre*. Il va donc à la boîte 1, puis à la boîte $f(1)$, puis à la boîte $f(f(1))$, etc. Il repère la 25^e boîte du cycle, puis continue jusqu'à trouver le carton 1 dans la boîte k ($k > 25$). Il échange les cartons de la 25^e boîte ouverte et de la boîte ouverte la k -ième fois. En faisant cela, le cycle auquel appartient 1 a maintenant pour longueur 25 (car la 25^e boîte ramène en 1). La permutation obtenue après l'échange des cartons n'a donc aucun cycle de taille supérieure à 25. Le prisonnier 2, en appliquant la stratégie *Suivre* à partir de la boîte k , sera ainsi certain de trouver le carton k qu'on lui aura demandé, et ce quel que soit k .

D'une énigme à l'autre

La variante suivante se présente très simplement et n'implique que très peu de personnages. Inspirée du problème du Monty Hall, elle a été proposée par Adam Landsberg, du Scripps College, aux États-Unis, et Eric Grundwald, de Londres.

Un jeu télévisé est organisé. Trois rideaux sont disposés sur la scène. L'un cache une voiture, un autre une clé, et le troisième rideau un appareil GPS. On ne sait pas dans quel ordre sont disposés les trois objets, et cet ordre a été choisi au hasard. Trois membres d'une même famille sont invités à jouer. Le premier pourra regarder derrière deux des rideaux et il doit trouver la voiture. Le second pourra regarder derrière deux des rideaux et devra trouver la clé de la voiture. Le troisième, toujours en observant derrière deux rideaux, devra trouver le GPS. Les joueurs jouent les uns après les autres, sans savoir

ce qu'ont fait et vu ceux déjà passés. Ils gagnent et emportent la voiture, la clé et le GPS si chacun a trouvé ce qu'il devait trouver. En jouant au hasard, ils gagnent dans $(2/3)^3 = 29,629\%$ des cas. Pourtant, en s'y prenant bien, ils pourraient gagner dans $2/3$ des cas, soit avec une probabilité de 66,66 %. Comment ?

Ils appliquent la stratégie *Suivre* en convenant d'un ordre entre les joueurs (celui qui doit trouver la voiture est le 1, celui qui doit trouver la clé est le 2, et celui qui doit trouver le GPS est le 3) et d'un ordre des éléments à trouver (la voiture est le 1, la clé le 2, le GPS le 3). La disposition des cadeaux derrière les rideaux définit une permutation f de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même. La probabilité de perdre correspond alors au rapport entre le nombre de permutations f ayant un cycle de taille 3 et le nombre total de permutations de 3 éléments, c'est-à-dire $3! = 6$.

On peut appliquer le raisonnement général considéré plus haut (il conclut que la probabilité de perdre est $1 - 1/3$), mais un raisonnement direct est possible. En effet, les 6 permutations de 3 éléments sont : $(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3)$, $(1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3)$, $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$, $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2)$, $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1)$. Deux d'entre elles ont un cycle de taille 3 : $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1)$ et $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2)$. Les autres n'ont que des cycles d'ordre 1 ou 2. Les joueurs gagneront donc dans $2/3$ des cas.

Deux variantes à 6 prisonniers ont été proposées récemment par Roland Yéléhada, (voir l'encadré page ci-contre). Les deux problèmes ont la propriété suivante qui vous forcera à réfléchir : ni la stratégie *Au hasard* ni la stratégie *Suivre* ne sont les meilleures. Attention, l'un des deux problèmes est facile et l'autre beaucoup moins.

Dans le monde physique, les miracles sont légion (une télévision, une voiture ou un smartphone seraient des objets magiques pour un homme du XV^e siècle). Dans le monde mathématique, certains miracles se produisent et ce qu'un raisonnement approximatif semblait éliminer définitivement (on ne pourrait faire mieux que la stratégie *Au hasard*) se révèle erroné pour le chercheur astucieux. De tels moments font le bonheur des mathématiciens.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

Wikipedia, **100 prisoners problem**, https://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem

E. Grundwald, **Re: The locker puzzle**, *Mathematical Intelligencer*, vol. 32(2), p. 1, 2010.

A. S. Landsberg, **The return of Monty Hall**, *Mathematical Intelligencer*, vol. 31(2), p. 1, 2009.

A. Gál et P. Bro Miltersen, **The cell probe complexity of succinct data structures**, *Theoretical Computer Science*, vol. 379(3), pp. 405-417, 2007.

E. Curtin et M. Warshauer, **The locker puzzle**, *Mathematical Intelligencer*, vol. 28, pp. 28-31, 2006.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Le Shingouz, un extraterrestre capitalo-alcoololo-écolo

Avec des ailes de chauve-souris et un penchant pour l'alcool, ce personnage de la bande dessinée Valérian et Laureline déploie une mosaïque de caractères bien terrestres !

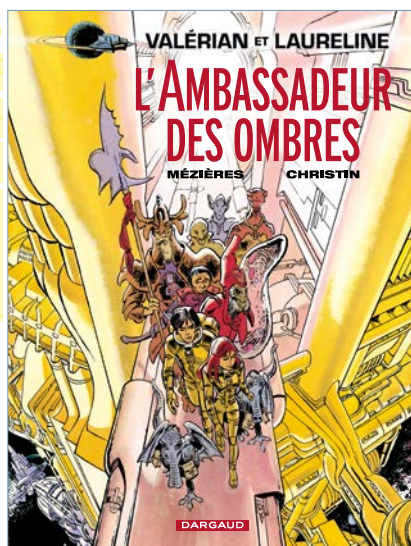
Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Illustration : Marc BOULAY

Quel animal fictif ressemble à un petit kangourou, arbore des ailes rigides de chauve-souris et une trompe, et présente un certain penchant pour les boissons alcoolisées ? Les amateurs de bandes dessinées le reconnaîtront : il s'agit du Shingouz, drôle d'espèce qui apparaît dans les aventures de *Valérian et Laureline*, un *space opera* des années 1970 créé par le scénariste Pierre Christin et le dessinateur Jean-Claude Mézières. Cette bande dessinée, véritable perle de la science-fiction française, est en cours d'adaptation au cinéma par Luc Besson.

Dans les aventures de Laureline et Valérian, ces extraterrestres intelligents que sont les Shingouz apparaissent toujours par trois et proviennent d'une planète sans nom dont les conditions sont si austères (climat très pluvieux et ressources quasi nulles) qu'elle les pousse régulièrement à l'exil. Afin de s'intégrer aux différentes civilisations où ils débarquent, ces réfugiés n'ont d'autre choix que d'exercer l'activité dans laquelle ils excellent, à savoir l'achat et la revente d'informations de toutes sortes. Ils apparaissent pour la première fois en 1975 dans un album intitulé « L'Ambassadeur des Ombres ».

Riche et exubérant, l'univers de Valérian et Laureline fait l'objet d'une sorte d'encyclopédie illustrée, *Les Habitants du ciel, atlas cosmique de Valérian et Laureline*, paru en 1991. Le Shingouz n'est qu'un des nombreux représentants de la faune et la flore



VALÉRIAN ET LAURELINE rencontrent les Shingouz dans le sixième tome de leurs aventures. Cette espèce extraterrestre présente des caractères rappelant ceux de certains animaux terrestres et des comportements bien humains.

extraterrestres imaginées par Pierre Christin et Jean-Claude Mézières. Il mérite bien que l'on s'y attarde. Son aspect n'a rien de terrestre, pourtant, à y regarder de plus près, son anatomie, sa biologie, son évolution et son comportement empruntent de nombreux traits bien terrestres.

Le pelage de ce petit être haut d'une cinquantaine de centimètres évoque celui des mammifères. Puisqu'il se déplace en posant la plante de ses grands pieds au sol, il est bipède et plantigrade. Son corps est redressé mais sa queue, massive et robuste, traîne souvent au sol. Comme chez les kangourous, cet appendice composé de vertèbres peut aussi servir de support. Les mains du Shingouz ont quatre doigts articulés et griffus, aux pouces opposables. Ses pieds et ses mains sont équipés de petits coussinets qui lui permettent, sur sa planète d'origine, d'évoluer sur un sol rendu humide par les pluies fréquentes (les biologistes parlent d'adaptation). Mais sur les autres planètes qu'il visite, ces coussinets sont aussi très utiles pour palper la monnaie ou toute autre valeur ayant cours légal (les mêmes biologistes parleraient alors d'exaptation !).

En plus de ses quatre membres classiques, le Shingouz est doté de deux ailes rigides qui évoquent celles des chauves-souris. Pour rendre plausible cette paire de membres surnuméraires (rappelons que les mammifères sont des tétrapodes, et non des hexapodes comme les insectes), les auteurs expliquent dans leur encyclopédie,