

LOGIQUE & CALCUL

Est-il vrai que $0,999... = 1$?

Les développements décimaux des nombres sont universellement utilisés. Cependant, certains nombres ont deux développements possibles. Il existe des approches qui tentent de l'éviter et de soutenir rigoureusement que $0,999... < 1$.

Jean-Paul DELAHAYE

Les notations aident à comprendre et soutiennent la pensée mathématique. De nombreux progrès sont dus à l'introduction de bons symboles et de règles précises qui en fixent la manipulation. Le système de numération décimal de position dû aux mathématiciens indiens des V^e, VI^e et VII^e siècles de notre ère permet à tous de représenter des nombres très grands ou très petits et de calculer avec. Ce fut une invention extraordinaire sans laquelle la science n'aurait sans doute pas pu se développer, ni le commerce ou l'industrie moderne.

Il existe cependant des cas où une notation engendre des confusions dont il est difficile de s'échapper. C'est le cas, du moins en première analyse, du problème qui nous intéresse ici. La question est : « Est-il vrai que $0,999... = 1$? » ou, au contraire, $0,999... < 1$? »

L'expression $0,999...$ se réfère bien évidemment à la notation décimale des nombres réels. Les points de suspension signifient ici que la suite de chiffres 9 se poursuit indéfiniment. Cela n'a de sens que moyennant l'idée que n'importe quelle suite de chiffres avec une virgule, par exemple $192,252525...$, désigne un nombre bien défini. Nous allons revenir sur le sens précis que l'on attribue aujourd'hui à cette notation. Mais auparavant, sans faire de théorie, et en appliquant quelques règles élémentaires de calcul, énumérons plusieurs des démonstrations que les professeurs de mathématiques proposent aux

étudiants afin de les persuader que l'affirmation $0,999... = 1$ est vraie.

Démonstration 1. Personne ne doute que $1/3 = 0,333...$ Imaginons en effet que l'on pose la division de 1 par 3. On trouve 0 ; puis 0,3 ; puis 0,33 ; puis 0,333. On est alors convaincu que cela se poursuit indéfiniment et donc que $1/3 = 0,333...$

$$\begin{array}{r|l} 1 & \begin{array}{r} 3 \quad 10 \\ 0 \quad 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} 3 \quad 10 \\ 0,3 \quad 10 \\ \quad 1 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 3 \quad 10 \\ 0,33 \quad 10 \\ \quad 10 \\ \quad 1 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 3 \\ 0,333 \end{array} \end{array}$$

Partant de l'égalité $1/3 = 0,333...$, en multipliant de chaque côté du signe égal par 3, on arrive à $3 \times 1/3 = 3 \times 0,333...$ ce qui donne $1 = 0,999...$

De même, partant de $1/9 = 0,111...$ obtenu en posant la division, on arrive, en multipliant par 9 de chaque côté du signe égal, encore à $1 = 0,999...$

Plusieurs démonstrations

Démonstration 2. Posons $u = 0,999...$ Multiplions de chaque côté par 10 (on remarque que multiplier par 10 un nombre en écriture décimale revient à déplacer la virgule d'une case vers la droite) : $10u = 9,999...$

Soustrayons maintenant $u = 0,999...$ de chaque côté de l'égalité : $10u - u = 9$ (car bien sûr $9,999... - 0,999... = 9$). Cela donne $9u = 9$, donc $u = 1$. On a ainsi à nouveau prouvé que $1 = 0,999...$

Démonstration 3. Faisons l'hypothèse que $0,999... < 1$. Considérons la moyenne m

des deux nombres $0,999...$ et 1. C'est un nombre inférieur à 1 et supérieur à 0,9, car la moyenne de deux nombres se situe toujours entre les deux nombres considérés. L'écriture décimale de m commence donc par 0,9. Cette moyenne m est aussi supérieure à 0,99 et inférieure à 1 ; c'est donc un nombre dont l'écriture décimale commence par 0,99.

En poursuivant, on établit que le développement décimal de m est nécessairement $0,999...$ La moyenne m est donc égale au plus petit des deux nombres considérés. C'est absurde, car la moyenne entre deux nombres différents n'est égale à aucun d'eux. L'hypothèse de départ, $0,999... < 1$, est donc fautive. Comme il ne se peut pas que $0,999... > 1$, on a nécessairement $1 = 0,999...$

Il existe une autre fin possible pour ce raisonnement. On pose $u = 0,999...$ Nous avons établi que $m = (u + 1)/2 = u$, donc $u + 1 = 2u$, ce qui donne $u = 1$.

Toutefois, les enseignants de mathématiques le savent bien : même après l'exposé de telles démonstrations, si on interroge les étudiants en leur laissant vraiment la parole, ils exprimeront encore des doutes sur la validité de l'égalité. De nombreuses études réalisées en divers endroits du monde confirment que même après une ou plusieurs démonstrations en bonne et due forme, tout le monde n'est pas convaincu de l'égalité.

Des dizaines d'articles de didactique des mathématiques ont porté sur cette étrangeté. Il me semble qu'elle a une

L'abandon des infinitésimaux

Bien que l'on ait utilisé les infinitésimaux dès l'Antiquité, ce sont les travaux de Leibniz qui ont permis leur emploi généralisé et le développement du calcul infinitésimal

aux XVII^e et XVIII^e siècles. Le grand mathématicien Leonhard

Euler les manipulait avec expertise dans son ouvrage

fondamental *Introductio in analysin infinitorum*.

Cependant, certaines difficultés à calculer rigoureusement avec les infinitésimaux ont conduit le mathématicien Michel Rolle et l'évêque George Berkeley (voir la bibliographie) à contester leur usage jugé trop incertain et finalement très délicat. Au XIX^e siècle, les travaux de Cauchy et de Weierstrass, entre autres, ont permis de les abandonner au profit d'une conception nouvelle qui se fonde sur la

définition suivante de limite d'une suite numérique et sur des définitions du même type pour la continuité des fonctions.

Par définition, la suite numérique (x_n) converge vers la limite L si pour tout ϵ (epsilon) donné strictement positif (par exemple de la forme $1/m$), il existe un entier k , tel que pour tout entier $n > k$, on a $|x_n - L| < \epsilon$.

Moyennant ces définitions et l'utilisation de la théorie des

ensembles, due à Cantor, pour construire les nombres réels à partir des entiers, on tire une conception de ces nombres universellement adoptée aujourd'hui. C'est le « continu ensembliste ». Il permet de résoudre la question de la comparaison entre 1 et 0,999... : $0,999... = \lim_{n \rightarrow \infty} 0,99...9$ (n fois le 9) $= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/10^n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 1/10^n = 1$.

L'idée d'infinitésimal n'a jamais été totalement abandonnée, y compris par Cauchy qui l'utilise pour formuler la notion de continuité avant d'en venir à la définition avec des ϵ . Le mathématicien Mikhail Katz (voir la bibliographie) dénonce la réécriture simplifiée de l'histoire

des mathématiques qui oublie le rôle constant des infinitésimaux dont l'utilisation n'a jamais vraiment cessé d'être féconde.

Abraham Robinson, dans la décennie 1960-1970, en a proposé une version moderne conforme aux canons de la rigueur mathématique contemporaine. L'analyse aujourd'hui peut donc soit se passer des infinitésimaux (ce qu'on fait dans l'enseignement le plus souvent), soit les utiliser en se fondant sur la conception de Robinson, dont il existe d'ailleurs à présent plusieurs présentations, certaines suffisamment simples pour l'enseignement.



G. W. Leibniz (1646-1716)



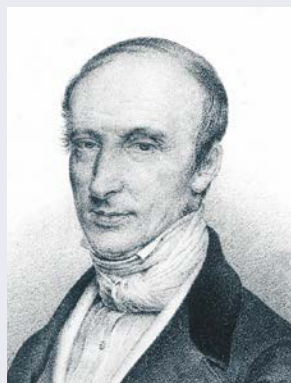
M. Rolle (1652-1719)



G. Berkeley (1685-1753)



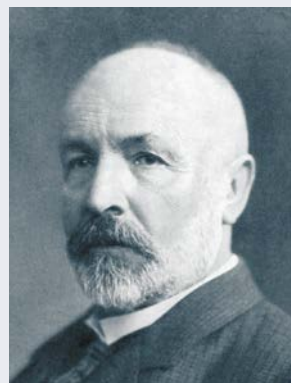
L. Euler (1707-1783)



A. L. Cauchy (1789-1857)



K. Weierstrass (1815-1897)



G. Cantor (1845-1918)



A. Robinson (1918-1974)