

explication simple. Les étudiants ne sont pas convaincus par les démonstrations du type de celles proposées plus haut parce que dans le monde des entiers et des nombres décimaux finis qu'ils manipulent depuis l'âge de 6 ou 8 ans, la règle suivante produit toujours un bon résultat.

Règle de comparaison. Pour comparer deux nombres positifs, on les place l'un sous l'autre en alignant les virgules, puis on regarde le premier chiffre différent rencontré en les parcourant simultanément de gauche à droite. Dès que deux chiffres différents sont rencontrés, on est certain que les deux nombres comparés sont différents et le plus petit des deux chiffres différents désigne le plus petit des deux nombres comparés.

Par exemple, si l'on doit comparer 0,28145 et 0,2813989, on écrit :

0,28145
0,2813989.

La règle indique que le premier nombre est le plus grand, car 4 est supérieur à 3. En appliquant la règle avec 1 (qu'on écrit aussi 1,000...) et 0,999..., on obtient que 1,000... est plus grand que 0,999..., car le premier chiffre du premier nombre est 1, et le premier chiffre du second est 0 :

1,000...
0,999...

D'après la règle de comparaison, pas de doute : $0,999... < 1$. La réponse d'un professeur à un étudiant récalcitrant qui lui exposerait cet argument sera, sous une forme ou une autre : « Ce qui est vrai avec les développements décimaux finis ne l'est pas nécessairement avec les développements décimaux infinis. La règle de comparaison des nombres entiers ou décimaux, valable s'ils sont finis, ne s'étend pas aux nombres réels écrits avec des développements décimaux infinis. » En langage simple : tout ne passe pas à l'infini.

L'autorité du professeur permet de clore le débat. Pourtant, l'étudiant récalcitrant pourrait à juste titre répliquer : « Mais ce passage à l'infini avec la règle de comparaison n'est pas moins légitime que ceux utilisés dans les démonstrations 1, 2 et 3 fondées aussi sur des extensions à l'infini des règles connues pour les développements décimaux finis. » Nous sommes alors revenus au point de départ. Qui a raison ? Le professeur avec ses trois démonstrations ou bien l'étudiant récalcitrant avec sa règle de comparaison qui contredit la thèse d'égalité du professeur ?

Pour prolonger le débat sans utiliser d'argument d'autorité, il faut revenir à la notion des développements décimaux illimités.

La conception admise universellement aujourd'hui se fonde sur l'idée de « suite

convergente ». Écrire un nombre r sous la forme $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ revient à dire que r est égal à

$a_1/10 + a_2/100 + a_3/1\,000 + \dots + a_n/10^n + \dots$, c'est-à-dire que r est la limite de la suite numérique : $a_1/10, a_1/10 + a_2/100, a_1/10 + a_2/100 + a_3/1\,000, \dots$

Epsilon à la rescousse

Le nombre r est ainsi la limite d'une suite dont chaque élément a un développement décimal fini. Par exemple, 0,333... désigne la limite de la suite 0, 3/10, 33/100, 333/1 000, etc. Cette conception a été rendue entièrement précise grâce aux notions de limite élaborées par Bernard Bolzano, Augustin Louis Cauchy et Karl Weierstrass au début du XIX^e siècle. C'est ce qu'on nomme parfois la définition des limites à la ϵ (epsilon) et δ (delta). En complétant celle-ci par les méthodes de construction de l'ensemble des nombres réels à partir des entiers (au moyen des « suites de Cauchy » ou des « coupures de Dedekind »), les mathématiciens se sont accordés sur une idée parfaitement précise des nombres réels et de ce que désignent les développements décimaux illimités.

Ces fondements rigoureux élaborés au XIX^e siècle nous rassurent, ainsi que l'accord unanime qui règne à leur sujet. C'est cette conception qui a été enseignée, et elle est devenue naturelle à tous. Nous la dénommerons la « conception classique des nombres réels et du continu ». Que nous dit cette conception de la question « $1 = 0,999... ?$ » ? Sans surprise, elle confirme le camp des professeurs.

Démonstration 4. Le nombre $u = 0,999...$ est la limite, quand n tend vers l'infini, de la suite dont le terme général est :

$x_n = 0,9 + 0,09 + \dots + 0,0\dots09$ (avec n zéros entre la virgule et le dernier 9). Après factorisation : $x_n = 0,9 (1 + 1/10 + \dots + 1/10^n)$.

Sachant que $0,9 = 1 - 1/10$, appliquons à ce résultat l'identité :

$(1 - a)(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n) = 1 - a^{n+1}$, que l'on peut vérifier en développant. On en déduit $x_n = 1 - 1/10^{n+1}$. La suite 10^{n+1} tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, donc $1/10^{n+1}$ tend vers 0, et x_n tend vers 1, d'où $1 = 0,999...$

Dans les autres bases de numération

Dans toutes les bases de numération, on rencontre une difficulté analogue à celle créée par les développements décimaux se terminant par une infinité de 9. Dans la base 2, la conception classique des nombres réels conduit à l'égalité $1 = 0,111\dots$; dans la base 3, on a $1 = 0,222\dots$; etc.

Il faut noter cependant que la non-unicité des développements décimaux (ou binaires, etc.) ne concerne qu'une faible partie des nombres réels.

Les nombres ayant deux développements décimaux sont en effet ceux de la

forme $k/10^p$ où k et p sont des nombres entiers. Il n'y a donc qu'une infinité dénombrable de nombres réels ayant deux développements décimaux différents. Comme l'infini des nombres réels est non dénombrable (autrement

dit, strictement plus grand que l'infini dénombrable), on peut dire que les nombres ayant deux développements décimaux différents sont en quantité négligeable par rapport aux autres nombres. L'unicité des développements décimaux est donc « presque toujours » vraie !

Remarquons aussi qu'il existe une façon d'avoir l'unicité des développements décimaux : il suffit d'interdire ceux se terminant par une infinité de 9.