

explication simple. Les étudiants ne sont pas convaincus par les démonstrations du type de celles proposées plus haut parce que dans le monde des entiers et des nombres décimaux finis qu'ils manipulent depuis l'âge de 6 ou 8 ans, la règle suivante produit toujours un bon résultat.

Règle de comparaison. Pour comparer deux nombres positifs, on les place l'un sous l'autre en alignant les virgules, puis on regarde le premier chiffre différent rencontré en les parcourant simultanément de gauche à droite. Dès que deux chiffres différents sont rencontrés, on est certain que les deux nombres comparés sont différents et le plus petit des deux chiffres différents désigne le plus petit des deux nombres comparés.

Par exemple, si l'on doit comparer 0,28145 et 0,2813989, on écrit :

0,28145
0,2813989.

La règle indique que le premier nombre est le plus grand, car 4 est supérieur à 3. En appliquant la règle avec 1 (qu'on écrit aussi 1,000...) et 0,999..., on obtient que 1,000... est plus grand que 0,999..., car le premier chiffre du premier nombre est 1, et le premier chiffre du second est 0 :

1,000...
0,999...

D'après la règle de comparaison, pas de doute : $0,999... < 1$. La réponse d'un professeur à un étudiant récalcitrant qui lui exposerait cet argument sera, sous une forme ou une autre : « Ce qui est vrai avec les développements décimaux finis ne l'est pas nécessairement avec les développements décimaux infinis. La règle de comparaison des nombres entiers ou décimaux, valable s'ils sont finis, ne s'étend pas aux nombres réels écrits avec des développements décimaux infinis. » En langage simple : tout ne passe pas à l'infini.

L'autorité du professeur permet de clore le débat. Pourtant, l'étudiant récalcitrant pourrait à juste titre répliquer : « Mais ce passage à l'infini avec la règle de comparaison n'est pas moins légitime que ceux utilisés dans les démonstrations 1, 2 et 3 fondées aussi sur des extensions à l'infini des règles connues pour les développements décimaux finis. » Nous sommes alors revenus au point de départ. Qui a raison ? Le professeur avec ses trois démonstrations ou bien l'étudiant récalcitrant avec sa règle de comparaison qui contredit la thèse d'égalité du professeur ?

Pour prolonger le débat sans utiliser d'argument d'autorité, il faut revenir à la notion des développements décimaux illimités.

La conception admise universellement aujourd'hui se fonde sur l'idée de « suite

convergente ». Écrire un nombre r sous la forme $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ revient à dire que r est égal à

$a_1/10 + a_2/100 + a_3/1\,000 + \dots + a_n/10^n + \dots$, c'est-à-dire que r est la limite de la suite numérique : $a_1/10, a_1/10 + a_2/100, a_1/10 + a_2/100 + a_3/1\,000, \dots$

Epsilon à la rescousse

Le nombre r est ainsi la limite d'une suite dont chaque élément a un développement décimal fini. Par exemple, 0,333... désigne la limite de la suite 0, 3/10, 33/100, 333/1 000, etc. Cette conception a été rendue entièrement précise grâce aux notions de limite élaborées par Bernard Bolzano, Augustin Louis Cauchy et Karl Weierstrass au début du XIX^e siècle. C'est ce qu'on nomme parfois la définition des limites à la ϵ (epsilon) et δ (delta). En complétant celle-ci par les méthodes de construction de l'ensemble des nombres réels à partir des entiers (au moyen des « suites de Cauchy » ou des « coupures de Dedekind »), les mathématiciens se sont accordés sur une idée parfaitement précise des nombres réels et de ce que désignent les développements décimaux illimités.

Ces fondements rigoureux élaborés au XIX^e siècle nous rassurent, ainsi que l'accord unanime qui règne à leur sujet. C'est cette conception qui a été enseignée, et elle est devenue naturelle à tous. Nous la dénommerons la « conception classique des nombres réels et du continu ». Que nous dit cette conception de la question « $1 = 0,999... ?$ » ? Sans surprise, elle confirme le camp des professeurs.

Démonstration 4. Le nombre $u = 0,999...$ est la limite, quand n tend vers l'infini, de la suite dont le terme général est : $x_n = 0,9 + 0,09 + \dots + 0,0\dots09$ (avec n zéros entre la virgule et le dernier 9). Après factorisation : $x_n = 0,9 (1 + 1/10 + \dots + 1/10^n)$.

Sachant que $0,9 = 1 - 1/10$, appliquons à ce résultat l'identité :

$(1 - a)(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n) = 1 - a^{n+1}$, que l'on peut vérifier en développant. On en déduit $x_n = 1 - 1/10^{n+1}$. La suite 10^{n+1} tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, donc $1/10^{n+1}$ tend vers 0, et x_n tend vers 1, d'où $1 = 0,999...$

Dans les autres bases de numération

Dans toutes les bases de numération, on rencontre une difficulté analogue à celle créée par les développements décimaux se terminant par une infinité de 9. Dans la base 2, la conception classique des nombres réels conduit à l'égalité $1 = 0,111\dots$; dans la base 3, on a $1 = 0,222\dots$; etc.

Il faut noter cependant que la non-unicité des développements décimaux (ou binaires, etc.) ne concerne qu'une faible partie des nombres réels.

Les nombres ayant deux développements décimaux sont en effet ceux de la

forme $k/10^p$ où k et p sont des nombres entiers. Il n'y a donc qu'une infinité dénombrable de nombres réels ayant deux développements décimaux différents. Comme l'infini des nombres réels est non dénombrable (autrement

dit, strictement plus grand que l'infini dénombrable), on peut dire que les nombres ayant deux développements décimaux différents sont en quantité négligeable par rapport aux autres nombres. L'unicité des développements décimaux est donc « presque toujours » vraie !

Remarquons aussi qu'il existe une façon d'avoir l'unicité des développements décimaux : il suffit d'interdire ceux se terminant par une infinité de 9.

Quelle théorie des infinitésimaux ?

Quand Leibniz invente le calcul infinitésimal en même temps que Newton, il utilise des infinitésimaux, c'est-à-dire des quantités plus petites que tout inverse de nombre entier. On les note parfois dx . Une propriété de ces nombres infiniment petits est que, même en en prenant beaucoup, on ne réussit jamais à atteindre la valeur 1 : $dx < 1$; $2dx < 1$; $3dx < 1$, etc. On dit que l'ensemble des nombres auxquels on ajoute les infinitésimaux est non archimédien.

La manipulation des infinitésimaux est délicate et conduit facilement à des incohérences que George Berkeley dénonça. S'en passer pour définir la continuité ou la notion de dérivée sera donc considéré comme un progrès au XIX^e siècle. Pourtant, en 1966, Abraham Robinson propose une théorie qui permet

de parler sans risque des nombres infiniment petits.

Depuis, d'autres méthodes ont été proposées pour manipuler des infinitésimaux. Il y a la théorie des *smooth infinitesimals* de John Bell, celle d'Alain Connes où l'on perd la commutativité. Les nombres surréels de John Conway

donnent aussi une version incontestablement rigoureuse de ces infinitésimaux, qui ont donc trouvé une place dans les mathématiques.

Cependant, aucune de ces théories ne propose des nombres réels aussi simples que la théorie classique qui refuse les infinitésimaux. On peut dire des infinitésimaux que, une fois ceux-ci maîtrisés, certaines démonstrations s'en trouvent simplifiées, mais que les maîtriser n'est pas simple. Ajouté au fait qu'on a au moins quatre façons assez différentes de les introduire, tout cela rend difficile une réhabilitation concrète des infinitésimaux et leur utilisation dans l'enseigne-

ment (bien que cela ait été tenté). Aucune de ces théories ne conduit d'ailleurs à donner un sens clair à l'inégalité stricte $0,999... < 1$. Dans certaines, elle est partiellement vraie, dans d'autres elle n'a pas de sens.

Quoi qu'on fasse, il ne semble pas possible de concevoir un continu donnant définitivement raison à ceux qui refusent d'admettre que $0,999... = 1$.

Sur les théories concurrentes des infinitésimaux, on pourra consulter Mikhail G. Katz et Éric Leichtnam, « Commuting and noncommuting infinitesimals », *American Mathematical Monthly*, vol. 120(7), pp. 631-641, 2013.

Nous n'avons pas détaillé toutes les étapes (avec des epsilons) qui justifient les affirmations successives, mais c'est assez facile pour qui a saisi l'esprit de la conception classique des nombres réels.

La notion classique de nombre réel, par le biais des limites, confirme donc que les démonstrations 1, 2 et 3 sont justes. Elle permettrait d'ailleurs de justifier les règles infinies à l'œuvre dans ces démonstrations, tout en ne permettant pas de valider la règle de comparaison utilisée par l'étudiant récalcitrant car les inégalités strictes ne passent pas à la limite pour les suites.

Avec des lycéens, il ne faut pas aller plus loin dans la discussion. On profitera au contraire de l'occasion pour énumérer toutes les conséquences de cette conception des réels fondée sur les limites. Les voici.

— Certains passages à la limite sont illégitimes : même si, pour tout entier n , $y_n < a$ et que la suite y_n est convergente, cela n'implique pas que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n < a$, mais seulement que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq a$.

— Certains nombres réels, ceux de la forme $n/10^k$ (n et k entiers), ont deux

développements décimaux : l'un se termine par une infinité de 0 (que l'on n'écrit pas), l'autre par une infinité de 9. Ainsi : $0,15 = 0,14999... ; 12,8 = 12,7999... ; 1 = 0,999...$

— La situation est analogue dans toutes les bases de numération. En base 2, par exemple, $1,000... = 0,111... ; 0,101 = 0,100111...$

— La difficulté à admettre que $1 = 0,999...$ provient de la confusion entre « notation décimale infinie » et « nombre réel ». Dans le monde des nombres entiers et décimaux finis, l'identification des nombres et de leur écriture décimale est sans conséquence du fait de l'unicité de l'écriture décimale. En passant aux développements infinis, elle devient impossible et oblige à une conception plus abstraite des nombres réels. Il ne faut pas assimiler les nombres réels et leur représentation décimale. Le monde aurait été plus simple si chaque nombre réel avait un unique développement décimal infini, mais ce n'est pas le cas !

Reste une question : est-il totalement inconcevable de définir une situation mathématique qui donne un sens à $0,999... < 1$? La réponse est qu'il est

possible de trouver des formalismes donnant raison à l'affirmation $0,999... < 1$. Attention cependant aux conséquences ! On va envisager deux voies permettant de préserver l'idée intuitive initiale d'une inégalité stricte entre $0,999...$ et 1. On verra qu'aucune ne conduit à un ensemble de nombres vraiment en mesure de concurrencer les nombres réels tels que le XIX^e siècle les a définis. Pour simplifier, nous n'envisagerons que des nombres positifs, mais bien sûr, moyennant quelques ajustements, tout ce que nous disons s'adapte aux nombres négatifs.

Les nombres réels de l'étudiant récalcitrant

La première méthode est simple et brutale : on dédouble les nombres décimaux finis. C'est une méthode économique : on ne change presque rien, on se contente de prendre au sérieux que $0,999... < 1$ et toutes les inégalités du même genre. Nous dénommerons cette attitude « les nombres réels de l'étudiant récalcitrant ».