

Quelle théorie des infinitésimaux ?

Quand Leibniz invente le calcul infinitésimal en même temps que Newton, il utilise des infinitésimaux, c'est-à-dire des quantités plus petites que tout inverse de nombre entier. On les note parfois dx . Une propriété de ces nombres infiniment petits est que, même en en prenant beaucoup, on ne réussit jamais à atteindre la valeur 1 : $dx < 1$; $2dx < 1$; $3dx < 1$, etc. On dit que l'ensemble des nombres auxquels on ajoute les infinitésimaux est non archimédien.

La manipulation des infinitésimaux est délicate et conduit facilement à des incohérences que George Berkeley dénonça. S'en passer pour définir la continuité ou la notion de dérivée sera donc considéré comme un progrès au XIX^e siècle. Pourtant, en 1966, Abraham Robinson propose une théorie qui permet

de parler sans risque des nombres infiniment petits.

Depuis, d'autres méthodes ont été proposées pour manipuler des infinitésimaux. Il y a la théorie des *smooth infinitesimals* de John Bell, celle d'Alain Connes où l'on perd la commutativité. Les nombres surréels de John Conway

donnent aussi une version incontestablement rigoureuse de ces infinitésimaux, qui ont donc trouvé une place dans les mathématiques.

Cependant, aucune de ces théories ne propose des nombres réels aussi simples que la théorie classique qui refuse les infinitésimaux. On peut dire des infinitésimaux que, une fois ceux-ci maîtrisés, certaines démonstrations s'en trouvent simplifiées, mais que les maîtriser n'est pas simple. Ajouté au fait qu'on a au moins quatre façons assez différentes de les introduire, tout cela rend difficile une réhabilitation concrète des infinitésimaux et leur utilisation dans l'enseigne-

ment (bien que cela ait été tenté). Aucune de ces théories ne conduit d'ailleurs à donner un sens clair à l'inégalité stricte $0,999... < 1$. Dans certaines, elle est partiellement vraie, dans d'autres elle n'a pas de sens.

Quoi qu'on fasse, il ne semble pas possible de concevoir un continu donnant définitivement raison à ceux qui refusent d'admettre que $0,999... = 1$.

Sur les théories concurrentes des infinitésimaux, on pourra consulter Mikhail G. Katz et Éric Leichtnam, « Commuting and noncommuting infinitesimals », *American Mathematical Monthly*, vol. 120(7), pp. 631-641, 2013.

Nous n'avons pas détaillé toutes les étapes (avec des epsilons) qui justifient les affirmations successives, mais c'est assez facile pour qui a saisi l'esprit de la conception classique des nombres réels.

La notion classique de nombre réel, par le biais des limites, confirme donc que les démonstrations 1, 2 et 3 sont justes. Elle permettrait d'ailleurs de justifier les règles infinies à l'œuvre dans ces démonstrations, tout en ne permettant pas de valider la règle de comparaison utilisée par l'étudiant récalcitrant car les inégalités strictes ne passent pas à la limite pour les suites.

Avec des lycéens, il ne faut pas aller plus loin dans la discussion. On profitera au contraire de l'occasion pour énumérer toutes les conséquences de cette conception des réels fondée sur les limites. Les voici.

— Certains passages à la limite sont illégitimes : même si, pour tout entier n , $y_n < a$ et que la suite y_n est convergente, cela n'implique pas que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n < a$, mais seulement que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq a$.

— Certains nombres réels, ceux de la forme $n/10^k$ (n et k entiers), ont deux

développements décimaux : l'un se termine par une infinité de 0 (que l'on n'écrit pas), l'autre par une infinité de 9. Ainsi : $0,15 = 0,14999... ; 12,8 = 12,7999... ; 1 = 0,999...$

— La situation est analogue dans toutes les bases de numération. En base 2, par exemple, $1,000... = 0,111... ; 0,101 = 0,100111...$

— La difficulté à admettre que $1 = 0,999...$ provient de la confusion entre « notation décimale infinie » et « nombre réel ». Dans le monde des nombres entiers et décimaux finis, l'identification des nombres et de leur écriture décimale est sans conséquence du fait de l'unicité de l'écriture décimale.

En passant aux développements infinis, elle devient impossible et oblige à une conception plus abstraite des nombres réels. Il ne faut pas assimiler les nombres réels et leur représentation décimale. Le monde aurait été plus simple si chaque nombre réel avait un unique développement décimal infini, mais ce n'est pas le cas !

Reste une question : est-il totalement inconcevable de définir une situation mathématique qui donne un sens à $0,999... < 1$? La réponse est qu'il est

possible de trouver des formalismes donnant raison à l'affirmation $0,999... < 1$. Attention cependant aux conséquences ! On va envisager deux voies permettant de préserver l'idée intuitive initiale d'une inégalité stricte entre $0,999...$ et 1. On verra qu'aucune ne conduit à un ensemble de nombres vraiment en mesure de concurrencer les nombres réels tels que le XIX^e siècle les a définis. Pour simplifier, nous n'envisagerons que des nombres positifs, mais bien sûr, moyennant quelques ajustements, tout ce que nous disons s'adapte aux nombres négatifs.

Les nombres réels de l'étudiant récalcitrant

La première méthode est simple et brutale : on dédouble les nombres décimaux finis. C'est une méthode économique : on ne change presque rien, on se contente de prendre au sérieux que $0,999... < 1$ et toutes les inégalités du même genre. Nous dénommerons cette attitude « les nombres réels de l'étudiant récalcitrant ».

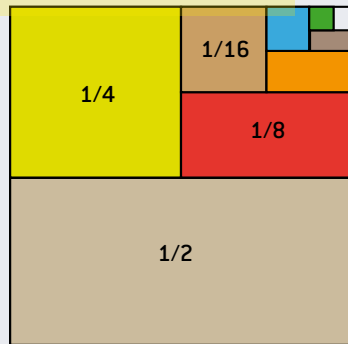
Une démonstration graphique

Une tentative pour démontrer que $0,999... = 1$ s'appuie sur un dessin.

On se place en base 2, où le problème est alors transformé en la question : $0,111... \text{ est-il égal à } 1$?

Le développement $0,111...$ désigne en fait la somme $1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n + ...$. Or le dessin ci-contre, où le grand carré de côté 1 est convenablement décomposé, montre que cette somme vaut bien 1.

Notons cependant que le sceptique, là encore, pourrait se montrer insatisfait. En effet, il n'est pas vrai que la réunion de tous les carrés et rectangles internes recouvre le coin en haut à droite du grand carré de côté 1. Ce point reste indéfiniment non recouvert !



$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1$$

On considère donc que toute suite de chiffres décimaux avec une virgule (par exemple 315,212121...) est un nombre réel et que deux tels nombres sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes chiffres. L'ordre qui permet de les classer est celui défini par la règle que l'étudiant évoquait : on place l'un sous l'autre les deux nombres à comparer en alignant les virgules et on les parcourt en parallèle de gauche à droite jusqu'à trouver une différence qui indique alors le plus petit. Cet ordre est dénommé ordre lexicographique sur les suites infinies (à droite) de chiffres avec virgules. Par exemple, 7 345,222222... est plus grand que 7 345,221222...

Avec ces nombres réels de l'étudiant récalcitrant, on a $0,999... < 1$.

L'ordre défini entre les nombres réels classiques est tel qu'entre deux nombres différents on trouve toujours une infinité d'autres nombres réels. Pour les nombres réels de l'étudiant récalcitrant, c'est vrai aussi... sauf dans le cas où les deux nombres sont ceux qui étaient auparavant confondus, comme 1 et $0,999...$. Pour l'ordre de l'étudiant récalcitrant, il n'y a, par exemple, aucun autre nombre entre 2,19999... et 2,20000... Ils sont différents et il y a comme un trou entre eux. En fait, il y a une infinité de tels trous : il y en a un derrière chaque nombre se terminant par une infinité de 9. Cela contredit l'idée que nous avons du continu, censé

représenter la structure de la droite géométrique, lisse et infinie. De ce point de vue déjà, les réels de l'étudiant récalcitrant ne sont pas très satisfaisants. Et ils rencontrent d'autres difficultés avec les opérations.

Pour définir les opérations entre les nombres réels de l'étudiant récalcitrant, plusieurs méthodes sont envisageables. Choisissons-en une et voyons ses défauts (les autres méthodes ne sont pas meilleures).

On convient que le résultat de l'addition de r et de r' (respectivement de la multiplication de r et de r') est le nombre $f(r+r')$ [respectivement $f(r \times r')$] où $+$ et $\times$ sont les opérations définies par les règles de calcul usuelles avec retenues et où f est l'opération qui transforme, si c'est nécessaire, une série infinie de 9 en 0 et qui simultanément ajoute 1 au chiffre juste avant la série des 9.

Pour l'étudiant récalcitrant, l'opération $0,666... + 0,333...$, par application des règles de calcul usuelles, donne d'abord $0,999...$, puis, par application de f , donne 1. Pour lui, on a donc : $0,666... + 0,333... = 1$. Si on avait choisi d'avoir $0,666... + 0,333... = 0,999...$ (plus naturel au premier abord), on aurait eu $1/3 + 2/3 = 0,333... + 0,666... = 0,999...$, alors qu'on s'attend à trouver $1/3 + 2/3 = 1$. Cela n'aurait pas été plus satisfaisant !

La méthode proposée évite, quand on calcule, de tomber sur des 999..., donc sur le problème mentionné avec $1/3 + 2/3$ et bien d'autres du même type. Surtout, les

opérations adoptées conduisent à démontrer sans mal que l'addition est commutative et associative, ainsi que la multiplication. Il y a aussi distributivité de l'addition par rapport à la multiplication. Les nombres réels de l'étudiant récalcitrant ont, à première vue, un comportement assez raisonnable.

Ce n'est pas vrai en tout point, car 1 n'est plus l'élément neutre de la multiplication : multiplier par 1 change parfois un nombre. On a en effet $0,999... \times 1 = 1$

Pire, la règle de simplification par un nombre non nul (si $a \neq 0$, alors de $ab = ac$ on déduit $b = c$) n'est plus vraie : de $0,999... \times 1 = 1 = 1 \times 1$ on ne peut pas déduire $0,999... = 1$, puisque justement, pour l'étudiant récalcitrant, $0,999...$ est différent de 1.

Pour utiliser ces nombres, il faudrait revoir toutes les règles de calcul et de manipulation algébrique qu'on a l'habitude d'utiliser.

La notion de limite dans le monde des nombres réels de l'étudiant récalcitrant n'est pas non plus très satisfaisante : la suite $1 - (1/10)^n$ ne converge pas vers 1, mais vers $0,999...$ [qui n'est pas 1 !]. Pourtant, $1/10^n$ converge vers 0, ce qui implique que $1/10^n - 1$ converge vers -1 . En d'autres termes, l'opposé d'une suite qui converge vers L n'a pas nécessairement comme limite $-L$. Désagréable ! L'étudiant récalcitrant disposera peut-être de nombres réels qui vérifient l'inégalité $0,999... < 1$, mais à quel prix ! Cherchons autre chose.

La voie de l'analyse non standard

La notion de limite définie au XIX^e siècle et qui fonde la conception contemporaine du continu interdit de considérer les infinitésimaux, c'est-à-dire les nombres plus petits que n'importe quel inverse d'un entier non nul. Ces nombres infiniment petits n'existent pas dans la conception classique des réels. Pourtant, les mathématiciens des XVII^e et XVIII^e siècles, Leibniz en particulier, les utilisaient. Les physiciens aujourd'hui encore aiment en faire usage, car ils simplifient certains calculs. Or en 1966, le mathématicien américain Abraham Robinson a montré que l'on peut envisager sans incohérence des nombres réels qui contiendraient des infinitésimaux. Sa théorie,