

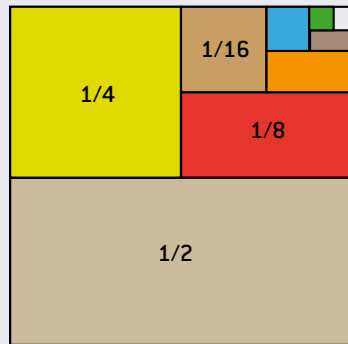
Une démonstration graphique

Une tentative pour démontrer que $0,999... = 1$ s'appuie sur un dessin.

On se place en base 2, où le problème est alors transformé en la question : $0,111... \text{ est-il égal à } 1$?

Le développement $0,111...$ désigne en fait la somme $1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n + ...$. Or le dessin ci-contre, où le grand carré de côté 1 est convenablement décomposé, montre que cette somme vaut bien 1.

Notons cependant que le sceptique, là encore, pourrait se montrer insatisfait. En effet, il n'est pas vrai que la réunion de tous les carrés et rectangles internes recouvre le coin en haut à droite du grand carré de côté 1. Ce point reste indéfiniment non recouvert !



$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1$$

On considère donc que toute suite de chiffres décimaux avec une virgule (par exemple 315,212121...) est un nombre réel et que deux tels nombres sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes chiffres. L'ordre qui permet de les classer est celui défini par la règle que l'étudiant évoquait : on place l'un sous l'autre les deux nombres à comparer en alignant les virgules et on les parcourt en parallèle de gauche à droite jusqu'à trouver une différence qui indique alors le plus petit. Cet ordre est dénommé ordre lexicographique sur les suites infinies (à droite) de chiffres avec virgules. Par exemple, 7 345,222222... est plus grand que 7 345,221222...

Avec ces nombres réels de l'étudiant récalcitrant, on a $0,999... < 1$.

L'ordre défini entre les nombres réels classiques est tel qu'entre deux nombres différents on trouve toujours une infinité d'autres nombres réels. Pour les nombres réels de l'étudiant récalcitrant, c'est vrai aussi... sauf dans le cas où les deux nombres sont ceux qui étaient auparavant confondus, comme 1 et $0,999...$. Pour l'ordre de l'étudiant récalcitrant, il n'y a, par exemple, aucun autre nombre entre 2,19999... et 2,20000... Ils sont différents et il y a comme un trou entre eux. En fait, il y a une infinité de tels trous : il y en a un derrière chaque nombre se terminant par une infinité de 9. Cela contredit l'idée que nous avons du continu, censé

représenter la structure de la droite géométrique, lisse et infinie. De ce point de vue déjà, les réels de l'étudiant récalcitrant ne sont pas très satisfaisants. Et ils rencontrent d'autres difficultés avec les opérations.

Pour définir les opérations entre les nombres réels de l'étudiant récalcitrant, plusieurs méthodes sont envisageables. Choisissons-en une et voyons ses défauts (les autres méthodes ne sont pas meilleures).

On convient que le résultat de l'addition de r et de r' (respectivement de la multiplication de r et de r') est le nombre $f(r+r')$ [respectivement $f(r \times r')$] où $+$ et $\times$ sont les opérations définies par les règles de calcul usuelles avec retenues et où f est l'opération qui transforme, si c'est nécessaire, une série infinie de 9 en 0 et qui simultanément ajoute 1 au chiffre juste avant la série des 9.

Pour l'étudiant récalcitrant, l'opération $0,666... + 0,333...$, par application des règles de calcul usuelles, donne d'abord $0,999...$, puis, par application de f , donne 1. Pour lui, on a donc : $0,666... + 0,333... = 1$. Si on avait choisi d'avoir $0,666... + 0,333... = 0,999...$ (plus naturel au premier abord), on aurait eu $1/3 + 2/3 = 0,333... + 0,666... = 0,999...$, alors qu'on s'attend à trouver $1/3 + 2/3 = 1$. Cela n'aurait pas été plus satisfaisant !

La méthode proposée évite, quand on calcule, de tomber sur des 999..., donc sur le problème mentionné avec $1/3 + 2/3$ et bien d'autres du même type. Surtout, les

opérations adoptées conduisent à démontrer sans mal que l'addition est commutative et associative, ainsi que la multiplication. Il y a aussi distributivité de l'addition par rapport à la multiplication. Les nombres réels de l'étudiant récalcitrant ont, à première vue, un comportement assez raisonnable.

Ce n'est pas vrai en tout point, car 1 n'est plus l'élément neutre de la multiplication : multiplier par 1 change parfois un nombre. On a en effet $0,999... \times 1 = 1$

Pire, la règle de simplification par un nombre non nul (si $a \neq 0$, alors de $ab = ac$ on déduit $b = c$) n'est plus vraie : de $0,999... \times 1 = 1 = 1 \times 1$ on ne peut pas déduire $0,999... = 1$, puisque justement, pour l'étudiant récalcitrant, $0,999...$ est différent de 1.

Pour utiliser ces nombres, il faudrait revoir toutes les règles de calcul et de manipulation algébrique qu'on a l'habitude d'utiliser.

La notion de limite dans le monde des nombres réels de l'étudiant récalcitrant n'est pas non plus très satisfaisante : la suite $1 - (1/10)^n$ ne converge pas vers 1, mais vers $0,999...$ [qui n'est pas 1 !]. Pourtant, $1/10^n$ converge vers 0, ce qui implique que $1/10^n - 1$ converge vers -1 . En d'autres termes, l'opposé d'une suite qui converge vers L n'a pas nécessairement comme limite $-L$. Désagréable ! L'étudiant récalcitrant disposera peut-être de nombres réels qui vérifient l'inégalité $0,999... < 1$, mais à quel prix ! Cherchons autre chose.

La voie de l'analyse non standard

La notion de limite définie au XIX^e siècle et qui fonde la conception contemporaine du continu interdit de considérer les infinitésimaux, c'est-à-dire les nombres plus petits que n'importe quel inverse d'un entier non nul. Ces nombres infiniment petits n'existent pas dans la conception classique des réels. Pourtant, les mathématiciens des XVII^e et XVIII^e siècles, Leibniz en particulier, les utilisaient. Les physiciens aujourd'hui encore aiment en faire usage, car ils simplifient certains calculs. Or en 1966, le mathématicien américain Abraham Robinson a montré que l'on peut envisager sans incohérence des nombres réels qui contiendraient des infinitésimaux. Sa théorie,

l'analyse non standard, est élégante et puissante ; elle a mis fin au discrédit dont étaient victimes les infinitésimaux. La théorie est fondée sur celle des modèles, un domaine de la logique mathématique développée au XX^e siècle. Elle constitue une conception alternative à la notion classique des réels.

Dans cette théorie, on construit une notion de développement décimal analogue à celle, classique, fondée sur les suites convergentes. On donne alors un sens à $0,999...$. Cette fois, cependant, les points de suspension désignent une infinité de 9, infinité qui peut prendre plusieurs sens car il y a maintenant plusieurs sortes de nombres entiers infinis H (qui n'existent pas dans la théorie classique) et il y a en beaucoup. Selon que le nombre infini de 9 représenté par les points de suspension de $0,999...$ est plus ou moins grand, on obtient soit un nombre réel qui est égal à 1, soit un nombre strictement inférieur à 1. Cela provient de ce que si on place H chiffres 9 dans $0,999...$, alors on a $0,999... = 1 - 1/10^H$, qui n'est pas 1 (à un infinitésimal près).

La théorie de ces développements décimaux a été faite par le mathématicien Albert Lightstone. L'étudiant récalcitrant qui renoncera sagement à sa première tentative pourrait se replier sur cette analyse non standard et soutenir que $0,999... < 1$ n'est pas absurde. Puisque les nombres réels de l'analyse non standard de Robinson constituent un corps (un ensemble où l'addition et la multiplication sont bien définies), on ne rencontrera pas avec eux les difficultés constatées avec la méthode trop naïve du dédoublement des décimaux finis.

0,999... est bien égal à 1 !

Que faut-il penser de cette analyse non standard ? Doit-on adopter ses nombres réels (parfois dénommés hyperréels) plutôt que ceux, classiques, légués par le XIX^e siècle et adoptés universellement ? La question est délicate. Disons simplement que de nombreux travaux continuent de défendre cette conception dont les partisans affirment qu'elle produit souvent, pour un même résultat, des démonstrations plus directes et simples que la conception clas-

sique. Certains soutiennent même qu'elle est utilisable dans le cadre d'un enseignement général de l'analyse.

Les opposants ou les sceptiques ne remettent pas en cause la cohérence de la théorie dont il a été prouvé qu'elle était aussi vraisemblable que celle des nombres réels classiques, mais ils doutent de sa simplicité. Le commentaire suivant provient d'un mathématicien assez représentatif qui, dans une discussion à propos de la rédaction d'un article de Wikipédia, écrivait :

« Je suis d'accord que l'analyse non standard est un domaine intéressant, qui explique certainement pourquoi les arguments informels utilisant les infinitésimaux produisent souvent les mêmes réponses que la méthode rigoureuse à la epsilon-delta des limites. Cependant, j'ai des doutes concernant l'affirmation que les preuves du calcul non standard sont plus simples ou plus claires que les preuves standard. Elles ne sont plus simples que si vous vous placez au cœur de l'analyse non standard, et il faut pour cela un haut niveau de maturité mathématique. Bien sûr, l'enseignant peut aider artificiellement les étudiants en leur disant : "Faites-moi confiance, nous pourrions faire tout cela rigoureusement si nous le voulions" ; mais alors c'est qu'il est en train en réalité de proposer un argument informel, et non pas une démonstration rigoureuse. »

Malgré cinquante ans d'existence, l'analyse non standard n'a pas pu s'imposer comme une conception alternative à l'analyse classique. Il est peu probable que cela se produise maintenant, d'autant qu'elle existe sous plusieurs formes concurrentes. Pas plus que d'autres tentatives, elle n'offre un moyen simple permettant de soutenir que l'on a définitivement $0,999... < 1$. On doit donc conclure qu'il faut accepter que $0,999... = 1$. Il est raisonnable aussi de considérer que l'intuition d'une inégalité stricte entre $0,999...$ et 1 n'est qu'un effet de confusion dû à une notation, laquelle nous piège en nous faisant imaginer une identité qui n'existe pas entre nombres réels et suites de chiffres décimaux avec virgule. Les notations sont des aides merveilleuses pour comprendre les mathématiques et les faire progresser ; parfois, cependant, elles nous embrouillent !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

P. Błaszczyk et al., Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking, *Foundations of Science*, vol. 18(1), pp. 43-74, 2013.

K. Katz, M. Katz, Zooming in on infinitesimal 1-... 9... in a post-triumvirate era, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 74(3), pp. 259-273, 2010.

M. Blay, Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *Revue d'histoire des sciences*, vol. 39(3), pp. 223-253, 1986 (<http://bit.ly/28M69c1>).

Discussions du problème $0,999... = 1$: www.quora.com/Is-0-999-dots-1-in-the-hyperreals www.cut-the-knot.org/WhatIs/Infinity/9999.shtml#MK

Wikipedia, Criticism of nonstandard analysis, https://en.wikipedia.org/wiki/Criticism_of_non-standard_analysis

M. Katz, When is .999... less than 1 ?, <http://u.cs.biu.ac.il/~katzmik/999.html>



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr