

l'analyse non standard, est élégante et puissante ; elle a mis fin au discrédit dont étaient victimes les infinitésimaux. La théorie est fondée sur celle des modèles, un domaine de la logique mathématique développée au XX<sup>e</sup> siècle. Elle constitue une conception alternative à la notion classique des réels.

Dans cette théorie, on construit une notion de développement décimal analogue à celle, classique, fondée sur les suites convergentes. On donne alors un sens à  $0,999\dots$ . Cette fois, cependant, les points de suspension désignent une infinité de 9, infinité qui peut prendre plusieurs sens car il y a maintenant plusieurs sortes de nombres entiers infinis  $H$  (qui n'existent pas dans la théorie classique) et il y a en beaucoup. Selon que le nombre infini de 9 représenté par les points de suspension de  $0,999\dots$  est plus ou moins grand, on obtient soit un nombre réel qui est égal à 1, soit un nombre strictement inférieur à 1. Cela provient de ce que si on place  $H$  chiffres 9 dans  $0,999\dots$ , alors on a  $0,999\dots = 1 - 1/10^H$ , qui n'est pas 1 (à un infinitésimal près).

La théorie de ces développements décimaux a été faite par le mathématicien Albert Lightstone. L'étudiant récalcitrant qui renoncera sagement à sa première tentative pourrait se replier sur cette analyse non standard et soutenir que  $0,999\dots < 1$  n'est pas absurde. Puisque les nombres réels de l'analyse non standard de Robinson constituent un corps (un ensemble où l'addition et la multiplication sont bien définies), on ne rencontrera pas avec eux les difficultés constatées avec la méthode trop naïve du dédoublement des décimaux finis.

## 0,999... est bien égal à 1 !

Que faut-il penser de cette analyse non standard ? Doit-on adopter ses nombres réels (parfois dénommés hyperréels) plutôt que ceux, classiques, légués par le XIX<sup>e</sup> siècle et adoptés universellement ? La question est délicate. Disons simplement que de nombreux travaux continuent de défendre cette conception dont les partisans affirment qu'elle produit souvent, pour un même résultat, des démonstrations plus directes et simples que la conception clas-

sique. Certains soutiennent même qu'elle est utilisable dans le cadre d'un enseignement général de l'analyse.

Les opposants ou les sceptiques ne remettent pas en cause la cohérence de la théorie dont il a été prouvé qu'elle était aussi vraisemblable que celle des nombres réels classiques, mais ils doutent de sa simplicité. Le commentaire suivant provient d'un mathématicien assez représentatif qui, dans une discussion à propos de la rédaction d'un article de Wikipédia, écrivait :

« Je suis d'accord que l'analyse non standard est un domaine intéressant, qui explique certainement pourquoi les arguments informels utilisant les infinitésimaux produisent souvent les mêmes réponses que la méthode rigoureuse à la epsilon-delta des limites. Cependant, j'ai des doutes concernant l'affirmation que les preuves du calcul non standard sont plus simples ou plus claires que les preuves standard. Elles ne sont plus simples que si vous vous placez au cœur de l'analyse non standard, et il faut pour cela un haut niveau de maturité mathématique. Bien sûr, l'enseignant peut aider artificiellement les étudiants en leur disant : "Faites-moi confiance, nous pourrions faire tout cela rigoureusement si nous le voulions" ; mais alors c'est qu'il est en train en réalité de proposer un argument informel, et non pas une démonstration rigoureuse. »

Malgré cinquante ans d'existence, l'analyse non standard n'a pas pu s'imposer comme une conception alternative à l'analyse classique. Il est peu probable que cela se produise maintenant, d'autant qu'elle existe sous plusieurs formes concurrentes. Pas plus que d'autres tentatives, elle n'offre un moyen simple permettant de soutenir que l'on a définitivement  $0,999\dots < 1$ . On doit donc conclure qu'il faut accepter que  $0,999\dots = 1$ . Il est raisonnable aussi de considérer que l'intuition d'une inégalité stricte entre  $0,999\dots$  et 1 n'est qu'un effet de confusion dû à une notation, laquelle nous piège en nous faisant imaginer une identité qui n'existe pas entre nombres réels et suites de chiffres décimaux avec virgule. Les notations sont des aides merveilleuses pour comprendre les mathématiques et les faire progresser ; parfois, cependant, elles nous embrouillent ! ■

## L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

## BIBLIOGRAPHIE

P. Blaszczyk et al., Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking, *Foundations of Science*, vol. 18(1), pp. 43-74, 2013.

K. Katz, M. Katz, Zooming in on infinitesimal 1-... 9... in a post-triumvirate era, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 74(3), pp. 259-273, 2010.

M. Blay, Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *Revue d'histoire des sciences*, vol. 39(3), pp. 223-253, 1986 (<http://bit.ly/28M69c1>).

Discussions du problème  $0,999\dots = 1$  : [www.quora.com/Is-0-999-dots-1-in-the-hyperreals](http://www.quora.com/Is-0-999-dots-1-in-the-hyperreals) [www.cut-the-knot.org/WhatIs/Infinity/9999.shtml#MK](http://www.cut-the-knot.org/WhatIs/Infinity/9999.shtml#MK)

Wikipedia, Criticism of nonstandard analysis, [https://en.wikipedia.org/wiki/Criticism\\_of\\_non-standard\\_analysis](https://en.wikipedia.org/wiki/Criticism_of_non-standard_analysis)

M. Katz, When is .999... less than 1 ?, <http://u.cs.biu.ac.il/~katzmik/999.html>



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur [www.pourlascience.fr](http://www.pourlascience.fr)

## SCIENCE &amp; FICTION

## Seul sur Mars, un manuel de survie

*Dans ce film qui raconte l'histoire d'un naufragé de l'espace, la science a un rôle prépondérant. Tempête de sable dévastatrice, culture de pommes de terre... : ces scènes sont-elles plausibles ?*

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

Illustration : Marc BOULAY

Elle est rouge. Elle est froide. Elle est désertique. Et pourtant, aucune autre planète n'a autant excité l'imagination, n'a été l'objet d'autant de rêves ou la cible d'autant de missions scientifiques. À l'heure où les émissaires robotisés de la planète Terre continuent à envahir Mars, le film *Seul sur Mars* (Ridley Scott, 2015), tiré du livre *The Martian* (Andy Weir, 2011) montre comment l'astronaute Mark Watney va survivre seul à la surface de la planète rouge grâce à ses connaissances scientifiques. L'histoire, bien documentée, repose sur des techniques aérospatiales actuelles. Et pourtant, on ne peut s'empêcher de se demander si tout cela est bien réaliste.

Commençons par examiner le vaisseau *Hermès* qui conduit les astronautes sur la planète Mars. Sa grande roue, façon *2001, l'Odyssée de l'espace*, reproduit une gravité artificielle, mais semble un peu excessive. On ne peut nier l'intérêt de recréer une pesanteur durant le voyage de six mois jusqu'à Mars, mais le dispositif utilisé sera sans doute plus léger et moins coûteux que celui du film. En revanche, le programme et le déroulé de la mission *Arès III* du film sont assez raisonnables. Ils ressemblent à ceux retenus par la Nasa, directement fondés sur les travaux de l'expert en exploration martienne Robert Zubrin : un vaisseau principal pour atteindre Mars, un habitat sous pression où séjourner sur place et un MAV (*Mars Ascent Vehicle*) pour quitter le sol et revenir au vaisseau principal, en orbite autour de la planète, le tout envoyé

avant l'arrivée des astronautes. Le MAV est un élément clé : trop massif pour être expédié sur Mars avec un réservoir plein, il est déposé à l'avance avec juste une petite réserve d'hydrogène. Il fabrique son carburant sur place à partir du dioxyde de carbone de l'atmosphère martienne grâce à une usine chimique alimentée par un moteur nucléaire.

Dans le film, le programme ne se déroule pas comme prévu. L'histoire commence quand les astronautes doivent faire décoller le MAV en pleine tempête martienne, avant que ce module ne bascule sous l'effet du vent. Devant l'urgence de la situation, ils sont contraints d'abandonner l'un des leurs, victime d'un accident. Le sol martien est régulièrement balayé par des tempêtes – les particules soulevées donnent d'ailleurs au ciel sa couleur orange (et bleue au coucher du Soleil). Mais la tempête du film peut-elle faire autant de dégâts ?

Avec une pression atmosphérique martienne très faible, 160 fois inférieure à celle de la Terre au niveau de la mer et une température moyenne de  $-60^{\circ}\text{C}$ , la densité atmosphérique de Mars est 60 fois inférieure à celle de la Terre. Or la pression exercée sur un obstacle par un fluide en mouvement est proportionnelle au produit de la densité du fluide par le carré de sa vitesse. Dès lors, si la pression exercée par un vent de vitesse donnée est 60 fois plus faible sur Mars que son équivalent terrestre, une tempête ne serait ressentie que comme une brise par les astronautes.



**DANS SEUL SUR MARS**, Mark Watney doit faire preuve d'ingéniosité pour survivre grâce à ses connaissances en chimie, en botanique, en électronique, etc.