

En 1939, alors que le danger d'être «à moitié juif» le guette, les Heydorn l'envoient rejoindre ses parents en France. Peu après le début de la guerre, sa mère et lui sont internés dans des camps français en tant qu'«étrangers indésirables». En 1942, Grothendieck trouve refuge dans le village du Chambon-sur-Lignon, où il suit sa scolarité jusqu'au baccalauréat. À partir de 1945, il étudie les mathématiques à l'université de Montpellier, financé par une petite bourse d'aide aux réfugiés, mais aussi en faisant les vendanges et divers petits emplois.

À Montpellier, les cours sont si vieillots que Grothendieck décide de se former en autodidacte. Au printemps 1948, il monte à Paris où il rencontre de grands mathématiciens : les aînés Henri Cartan, Jean Leray, Jean Dieudonné, Claude Chevalley et André Weil, ainsi que ceux de sa génération, Jean-Pierre Serre, Pierre Cartier et François Bruhat. Au cours du célèbre séminaire de Cartan, il s'approprie les mathématiques les plus récentes à une vitesse impressionnante, malgré sa médiocre formation. En 1949, Grothendieck se rend à Nancy, auprès des mathématiciens alors déjà célèbres Laurent Schwartz et Jean Dieudonné.

■ L'AUTEUR



Winfried SCHARLAU est professeur de mathématiques émérite à l'université de Münster, en Allemagne.

Ainsi commence une période de vingt et un ans de sa vie presque entièrement dévouée aux mathématiques. On raconte souvent une anecdote sans doute un peu exagérée mais certainement vraie pour l'essentiel. Peu de temps après son arrivée, Grothendieck demande à Schwartz un sujet de thèse. Schwartz, qui venait d'être récompensé par la médaille Fields – un équivalent du prix Nobel, pour les mathématiques – lui confie un article qu'il venait de publier avec Dieudonné et qui contenait une liste de quatorze problèmes irrésolus. Il lui suggère de commencer par se familiariser avec un ou deux problèmes. L'étudiant, complètement inconnu, d'origines mystérieuses et dont la seule certitude qu'on avait de lui était que sa formation était très lacunaire, disparaît et revient quelques semaines plus tard en ayant résolu la moitié des problèmes. Il s'occupe de l'autre moitié en quelques mois supplémentaires, au cours desquels il ne demande conseil à personne.

À partir de là, il devint clair que Grothendieck était un mathématicien de tout premier plan. Sous l'influence de Schwartz et Dieudonné, il s'intéressa à l'analyse fonctionnelle. Cette branche des mathématiques consacrée aux fonctions considère celles-ci

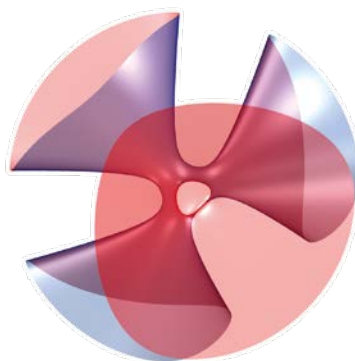
Sans titre
Kurt Ballay



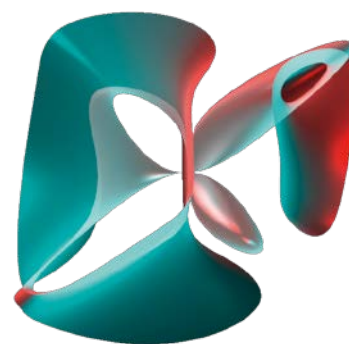
Inclination
Hiltrud Heinrich



Octaèdre concave
Gerhard Brunthaler



Surface diagonale de Clebsch'sche
Hermann Bauer



Porolohmanella
Eduard Baumann

LES SURFACES ALGÈBRIQUES sont définies par des équations polynomiales dont les coefficients sont des nombres réels. Les quelques exemples présentés ici ont été produits lors d'un concours organisé par la revue allemande *Spektrum der Wissenschaft*. Ces figures illustrent la

diversité des surfaces algébriques, finies ou infinies, composées d'un ou plusieurs morceaux, avec des pointes ou des auto-intersections, etc. Les travaux en géométrie algébrique ont permis de classer et de mettre de l'ordre dans cette classe d'objets et d'autres.

comme des points d'un espace de dimension infinie. Lorsqu'on ne connaît pas la fonction qui résout un problème (par exemple une équation différentielle), ou même lorsqu'on ignore si cette solution existe, il est parfois possible de trouver une suite de fonctions qui s'approche de mieux en mieux de la solution. Si ces fonctions étaient des points d'un espace de dimension finie (par exemple notre espace usuel à trois dimensions), on pourrait essayer de donner une certaine forme à la suite des approximations, de sorte qu'elle ait alors une limite qui soit la solution du problème initial. Mais il n'est pas évident de généraliser la notion de limite aux espaces de fonctions, de dimension infinie.

Au tout début de sa carrière, Grothendieck aspirait déjà à la plus grande généralité possible. Dans sa thèse soutenue en 1953, il introduisit ainsi un nouveau type d'espaces de fonctions, les « espaces nucléaires », caractérisés par le fait que les suites d'éléments de ces espaces et leurs limites s'y comportent essentiellement comme dans un espace de dimension finie.

En tant qu'apatride, Grothendieck eut des difficultés à trouver un poste en France après son doctorat. Par l'intermédiaire de Schwartz, il se rendit ainsi à Sao Paulo (Brésil), puis à Lawrence (Kansas, États-Unis), où on lui offrit des conditions de recherche favorables. Vers 1954-55, peu avant son retour à Paris, il abandonna brusquement et radicalement l'analyse fonctionnelle et se tourna vers la géométrie algébrique. D'une façon qui lui était tout à fait caractéristique, il ne se rua pas immédiatement sur des problèmes concrets de son nouveau domaine de recherche, mais chercha d'abord à rénover et reconstruire une théorie-outil, l'algèbre homologique.

La géométrie algébrique s'occupe des propriétés géométriques d'objets définis par des équations algébriques, c'est-à-dire des équations où les variables ne sont combinées entre elles que par des additions, des soustractions et des multiplications. Les plus simples de ces « variétés algébriques » sont des courbes planes définies par des équations à deux variables réelles. Par exemple, dans le plan muni des coordonnées (x, y) , l'ensemble des points satisfaisant l'équation $x^2 + y^2 = 1$ est le cercle centré en l'origine et de rayon 1, l'équation $y - x^2 = 0$ correspond à une parabole et l'équation $xy - 1 = 0$ représente une hyperbole.

En trois dimensions, une variété algébrique décrite par une équation en x, y et z



À L'INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES, haut lieu des mathématiques situé à Bures-sur-Yvette, près de Paris, Alexandre Grothendieck a donné des cours dans les années 1960 et notamment son célèbre « Séminaire de géométrie algébrique », dont les notes seront publiées dans les *Éléments de géométrie algébrique*.

est, en général, une surface. L'informatique permet de visualiser de telles surfaces (voir les figures page ci-contre). Même si ces nombreuses et belles images n'ont pas fait sérieusement avancer la géométrie algébrique, elles laissent tout de même entrevoir la diversité des formes qui peuvent émerger d'une simple équation : étendues à l'infini ou bornées, constituées d'un ou de plusieurs morceaux, avec des auto-intersections, des pointes affilées comme des aiguilles, ou des trous comme dans le cas d'un tore ou d'un bretzel...

Les débuts d'un long travail de généralisation

En géométrie algébrique, l'objectif est de mettre de l'ordre dans cette diversité. Pour ce faire, on ne considère pas des propriétés « métriques » s'exprimant à l'aide de longueurs et d'angles, mais plutôt des propriétés qualitatives. Ainsi, le cercle et la parabole sont formés d'un morceau, alors que l'hyperbole en compte deux ; le cercle est fini tandis que la parabole et l'hyperbole s'étendent à l'infini ; un tore (la forme d'une chambre à air de pneu) comporte un trou, au contraire d'une sphère.

C'est par le théorème dit de Riemann-Roch que Grothendieck s'est vraiment révélé. Tel qu'il a été énoncé au XIX^e siècle par l'Allemand Bernhard Riemann et surtout par

son élève Gustav Roch, ce théorème fournit une relation entre les zéros et les pôles d'une fonction (les points où la fonction s'annule et ceux où elle devient singulière, infinie) sur une surface de Riemann (une variété complexe de dimension 1, c'est-à-dire un espace dont le voisinage de chaque point est assimilable à un morceau de $\mathbb{C}$, le plan des nombres complexes). La preuve classique se fait par des moyens issus de l'analyse à partir des fonctions différentiables qui décrivent les surfaces algébriques.

En 1953, le mathématicien allemand Friedrich Hirzebruch fit sensation en démontrant une généralisation du théorème de Riemann-Roch aux variétés de dimension supérieure, utilisant pour cela de nouvelles méthodes analytiques et topologiques dérivées des travaux d'Henri Cartan, Jean-Pierre Serre et René Thom.

Grothendieck dépassa ce succès en 1957 avec une généralisation du théorème de portée encore plus grande. Ce coup de génie le propulsa soudain sous les feux de la rampe du milieu mathématique, contrairement à ses résultats en analyse fonctionnelle, qui étaient pourtant également spectaculaires. À la différence de la preuve de Hirzebruch, celle de Grothendieck est purement algébrique. Il en résulte une extension drastique du domaine d'applicabilité du théorème : alors que jusque-là, les équations algébriques définissant une variété ne pouvaient s'appliquer

© IHES René Bouillot