

comme des points d'un espace de dimension infinie. Lorsqu'on ne connaît pas la fonction qui résout un problème (par exemple une équation différentielle), ou même lorsqu'on ignore si cette solution existe, il est parfois possible de trouver une suite de fonctions qui s'approche de mieux en mieux de la solution. Si ces fonctions étaient des points d'un espace de dimension finie (par exemple notre espace usuel à trois dimensions), on pourrait essayer de donner une certaine forme à la suite des approximations, de sorte qu'elle ait alors une limite qui soit la solution du problème initial. Mais il n'est pas évident de généraliser la notion de limite aux espaces de fonctions, de dimension infinie.

Au tout début de sa carrière, Grothendieck aspirait déjà à la plus grande généralité possible. Dans sa thèse soutenue en 1953, il introduisit ainsi un nouveau type d'espaces de fonctions, les « espaces nucléaires », caractérisés par le fait que les suites d'éléments de ces espaces et leurs limites s'y comportent essentiellement comme dans un espace de dimension finie.

En tant qu'apatride, Grothendieck eut des difficultés à trouver un poste en France après son doctorat. Par l'intermédiaire de Schwartz, il se rendit ainsi à Sao Paulo (Brésil), puis à Lawrence (Kansas, États-Unis), où on lui offrit des conditions de recherche favorables. Vers 1954-55, peu avant son retour à Paris, il abandonna brusquement et radicalement l'analyse fonctionnelle et se tourna vers la géométrie algébrique. D'une façon qui lui était tout à fait caractéristique, il ne se rua pas immédiatement sur des problèmes concrets de son nouveau domaine de recherche, mais chercha d'abord à rénover et reconstruire une théorie-outil, l'algèbre homologique.

La géométrie algébrique s'occupe des propriétés géométriques d'objets définis par des équations algébriques, c'est-à-dire des équations où les variables ne sont combinées entre elles que par des additions, des soustractions et des multiplications. Les plus simples de ces « variétés algébriques » sont des courbes planes définies par des équations à deux variables réelles. Par exemple, dans le plan muni des coordonnées (x, y) , l'ensemble des points satisfaisant l'équation $x^2 + y^2 = 1$ est le cercle centré en l'origine et de rayon 1, l'équation $y - x^2 = 0$ correspond à une parabole et l'équation $xy - 1 = 0$ représente une hyperbole.

En trois dimensions, une variété algébrique décrite par une équation en x, y et z



© IHES René Bouillot

À L'INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES, haut lieu des mathématiques situé à Bures-sur-Yvette, près de Paris, Alexandre Grothendieck a donné des cours dans les années 1960 et notamment son célèbre « Séminaire de géométrie algébrique », dont les notes seront publiées dans les *Éléments de géométrie algébrique*.

est, en général, une surface. L'informatique permet de visualiser de telles surfaces (voir les figures page ci-contre). Même si ces nombreuses et belles images n'ont pas fait sérieusement avancer la géométrie algébrique, elles laissent tout de même entrevoir la diversité des formes qui peuvent émerger d'une simple équation : étendues à l'infini ou bornées, constituées d'un ou de plusieurs morceaux, avec des auto-intersections, des pointes affilées comme des aiguilles, ou des trous comme dans le cas d'un tore ou d'un bretzel...

Les débuts d'un long travail de généralisation

En géométrie algébrique, l'objectif est de mettre de l'ordre dans cette diversité. Pour ce faire, on ne considère pas des propriétés « métriques » s'exprimant à l'aide de longueurs et d'angles, mais plutôt des propriétés qualitatives. Ainsi, le cercle et la parabole sont formés d'un morceau, alors que l'hyperbole en compte deux ; le cercle est fini tandis que la parabole et l'hyperbole s'étendent à l'infini ; un tore (la forme d'une chambre à air de pneu) comporte un trou, au contraire d'une sphère.

C'est par le théorème dit de Riemann-Roch que Grothendieck s'est vraiment révélé. Tel qu'il a été énoncé au XIX^e siècle par l'Allemand Bernhard Riemann et surtout par

son élève Gustav Roch, ce théorème fournit une relation entre les zéros et les pôles d'une fonction (les points où la fonction s'annule et ceux où elle devient singulière, infinie) sur une surface de Riemann (une variété complexe de dimension 1, c'est-à-dire un espace dont le voisinage de chaque point est assimilable à un morceau de $\mathbb{C}$, le plan des nombres complexes). La preuve classique se fait par des moyens issus de l'analyse à partir des fonctions différentiables qui décrivent les surfaces algébriques.

En 1953, le mathématicien allemand Friedrich Hirzebruch fit sensation en démontrant une généralisation du théorème de Riemann-Roch aux variétés de dimension supérieure, utilisant pour cela de nouvelles méthodes analytiques et topologiques dérivées des travaux d'Henri Cartan, Jean-Pierre Serre et René Thom.

Grothendieck dépassa ce succès en 1957 avec une généralisation du théorème de portée encore plus grande. Ce coup de génie le propulsa soudain sous les feux de la rampe du milieu mathématique, contrairement à ses résultats en analyse fonctionnelle, qui étaient pourtant également spectaculaires. À la différence de la preuve de Hirzebruch, celle de Grothendieck est purement algébrique. Il en résulte une extension drastique du domaine d'applicabilité du théorème : alors que jusque-là, les équations algébriques définissant une variété ne pouvaient s'appliquer

qu'à des variables réelles ou complexes, Grothendieck a remplacé ces ensembles de nombres par des corps quelconques (c'est-à-dire des ensembles où l'on peut définir entre les éléments une addition, une multiplication et son inverse, la division). Ce pas décisif rendra possibles, plus tard, des applications à la théorie des nombres classique.

Par ailleurs, Grothendieck ne s'est pas intéressé uniquement aux variétés isolées, mais aussi à certains morphismes entre deux variétés X et Y . Un morphisme est ce que l'on nomme plus communément une application, c'est-à-dire une relation entre deux espaces, qui à tout point de l'espace de départ associe un point de l'espace d'arrivée. Dans le cas particulier où la variété Y est réduite à un seul point, le théorème de Grothendieck a permis de retrouver la version de Hirzebruch du théorème de Riemann-Roch.

On touche là à un point pour ainsi dire philosophique : ce qui était important pour Grothendieck, ce ne sont pas les objets pris isolément, mais plutôt les relations

(les fonctions, les morphismes...) entre eux (voir l'encadré ci-dessous).

La théorie des catégories, qui était à cette époque toute naissante, vise à se situer dans cette même perspective (voir l'article de Jean Malgoire, pages 30 à 37). Analogue à la théorie des ensembles, mais plus abstraite encore, elle définit un cadre formel pour construire une théorie mathématique, et désigne les questions fondamentales, dont celle de savoir quels sont les objets d'une théorie ayant des propriétés universelles particulières. S'il est vrai qu'aucun problème profond n'a été résolu à l'aide de la théorie des catégories, elle a amené de l'ordre en géométrie algébrique. Cette approche a mis en évidence que de nombreuses démonstrations indépendantes les unes des autres étaient, en réalité, autant d'applications d'un même résultat tout à fait général en théorie des catégories. Les mathématiciens ont alors établi de nombreux liens, des sortes de dictionnaires, entre des situations qui semblaient *a priori* indépendantes les unes

des autres. De plus, la théorie des catégories a mis l'accent sur les morphismes plutôt que sur les objets, exactement comme ce qu'a fait Grothendieck avec le théorème de Riemann-Roch.

Un institut créé presque que pour lui

En 1958, l'homme d'affaires français Léon Motchane créa près de Paris l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), un établissement de recherche comportant une poignée de professeurs permanents, mais un grand nombre de chercheurs invités du monde entier. Dieudonné et Grothendieck y furent les premiers professeurs de mathématiques. Grothendieck y organisa son « Séminaire de géométrie algébrique », lequel attira de nombreux mathématiciens brillants, dont Michael Artin, Pierre Berthelot, Luc Illusie, Michel Demazure et Pierre Deligne. C'est là que fut élaborée la nouvelle géométrie algébrique.

LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRE D'APRÈS GROTHENDIECK OU : « QU'EST-CE QU'UN SCHÉMA ? »

L'objet central de la géométrie algébrique revue par Grothendieck n'est pas, comme auparavant, une courbe ou une surface, mais quelque chose de très abstrait et de très général qui porte le nom de « schéma ». D'une certaine façon, on adopte un point de vue supérieur, duquel on peut appréhender d'un regard unifié non seulement la géométrie algébrique classique, mais aussi la théorie des nombres.

Pour ce faire, Grothendieck s'est inspiré des propriétés des objets de la géométrie algébrique classique, les variétés algébriques. À deux dimensions par exemple, ces objets sont les ensembles de points (x, y) qui annulent un certain polynôme, tel $x^2 + y^2 - 1$ pour le cercle ou $x^2 - y^2 - z^2$ pour un paraboloïde hyperbolique (image ci-contre). Les polynômes peuvent s'additionner, se soustraire et se multiplier (mais pas se diviser). L'ensemble des polynômes forme un anneau commutatif, c'est-à-dire un ensemble d'objets (les polynômes) dans lequel une addition, une soustraction et une multiplication peuvent

être définies et où, en particulier, la multiplication est commutative (c'est-à-dire que pour deux polynômes quelconques f et g , on a toujours $fg = gf$).

Surtout, à la base, les polynômes sont des fonctions. Ainsi, un polynôme de trois variables associe à tout point (x, y, z) de l'espace un nombre réel (et les points qui sont associés au nombre 0 forment une variété). C'est cette propriété qui a conduit Grothendieck à la notion de schéma.

Première étape

Grothendieck prend des anneaux commutatifs quelconques

comme objets de base. Parmi eux, l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ joue le rôle que joue le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ pour les anneaux de polynômes.

Deuxième étape

Grothendieck considère alors les éléments d'un anneau

commutatif quelconque comme des « fonctions » (dans un sens très général et à préciser) dont le domaine de définition est nommé le « spectre » de l'anneau (voir l'article de Jean Malgoire pages 30 à 37). Par exemple, pour l'anneau des entiers, Grothendieck construit une fonction pour chacun des nombres entiers.

