

qu'à des variables réelles ou complexes, Grothendieck a remplacé ces ensembles de nombres par des corps quelconques (c'est-à-dire des ensembles où l'on peut définir entre les éléments une addition, une multiplication et son inverse, la division). Ce pas décisif rendra possibles, plus tard, des applications à la théorie des nombres classique.

Par ailleurs, Grothendieck ne s'est pas intéressé uniquement aux variétés isolées, mais aussi à certains morphismes entre deux variétés X et Y . Un morphisme est ce que l'on nomme plus communément une application, c'est-à-dire une relation entre deux espaces, qui à tout point de l'espace de départ associe un point de l'espace d'arrivée. Dans le cas particulier où la variété Y est réduite à un seul point, le théorème de Grothendieck a permis de retrouver la version de Hirzebruch du théorème de Riemann-Roch.

On touche là à un point pour ainsi dire philosophique : ce qui était important pour Grothendieck, ce ne sont pas les objets pris isolément, mais plutôt les relations

(les fonctions, les morphismes...) entre eux (voir l'encadré ci-dessous).

La théorie des catégories, qui était à cette époque toute naissante, vise à se situer dans cette même perspective (voir l'article de Jean Malgoire, pages 30 à 37). Analogie à la théorie des ensembles, mais plus abstraite encore, elle définit un cadre formel pour construire une théorie mathématique, et désigne les questions fondamentales, dont celle de savoir quels sont les objets d'une théorie ayant des propriétés universelles particulières. S'il est vrai qu'aucun problème profond n'a été résolu à l'aide de la théorie des catégories, elle a amené de l'ordre en géométrie algébrique. Cette approche a mis en évidence que de nombreuses démonstrations indépendantes les unes des autres étaient, en réalité, autant d'applications d'un même résultat tout à fait général en théorie des catégories. Les mathématiciens ont alors établi de nombreux liens, des sortes de dictionnaires, entre des situations qui semblaient *a priori* indépendantes les unes

des autres. De plus, la théorie des catégories a mis l'accent sur les morphismes plutôt que sur les objets, exactement comme ce qu'a fait Grothendieck avec le théorème de Riemann-Roch.

Un institut créé presque que pour lui

En 1958, l'homme d'affaires français Léon Motchane créa près de Paris l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), un établissement de recherche comportant une poignée de professeurs permanents, mais un grand nombre de chercheurs invités du monde entier. Dieudonné et Grothendieck y furent les premiers professeurs de mathématiques. Grothendieck y organisa son « Séminaire de géométrie algébrique », lequel attira de nombreux mathématiciens brillants, dont Michael Artin, Pierre Berthelot, Luc Illusie, Michel Demazure et Pierre Deligne. C'est là que fut élaborée la nouvelle géométrie algébrique.

LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRE D'APRÈS GROTHENDIECK OU : « QU'EST-CE QU'UN SCHÉMA ? »

L'objet central de la géométrie algébrique revue par Grothendieck n'est pas, comme auparavant, une courbe ou une surface, mais quelque chose de très abstrait et de très général qui porte le nom de « schéma ». D'une certaine façon, on adopte un point de vue supérieur, duquel on peut appréhender d'un regard unifié non seulement la géométrie algébrique classique, mais aussi la théorie des nombres.

Pour ce faire, Grothendieck s'est inspiré des propriétés des objets de la géométrie algébrique classique, les variétés algébriques. À deux dimensions par exemple, ces objets sont les ensembles de points (x, y) qui annulent un certain polynôme, tel $x^2 + y^2 - 1$ pour le cercle ou $x^2 - y^2 - z^2$ pour un paraboloïde hyperbolique (image ci-contre). Les polynômes peuvent s'additionner, se soustraire et se multiplier (mais pas se diviser). L'ensemble des polynômes forme un anneau commutatif, c'est-à-dire un ensemble d'objets (les polynômes) dans lequel une addition, une soustraction et une multiplication peuvent

être définies et où, en particulier, la multiplication est commutative (c'est-à-dire que pour deux polynômes quelconques f et g , on a toujours $fg = gf$).

Surtout, à la base, les polynômes sont des fonctions. Ainsi, un polynôme de trois variables associe à tout point (x, y, z) de l'espace un nombre réel (et les points qui sont associés au nombre 0 forment une variété). C'est cette propriété qui a conduit Grothendieck à la notion de schéma.

Première étape

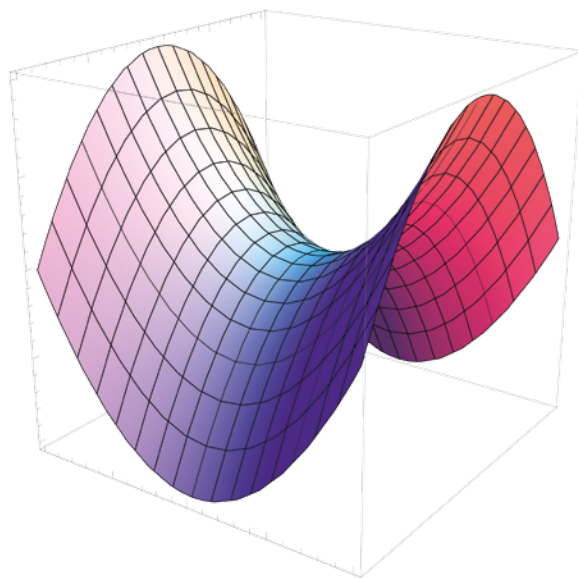
Grothendieck prend des anneaux commutatifs quelconques

comme objets de base. Parmi eux, l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ joue le rôle que joue le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ pour les anneaux de polynômes.

Deuxième étape

Grothendieck considère alors les éléments d'un anneau

commutatif quelconque comme des « fonctions » (dans un sens très général et à préciser) dont le domaine de définition est nommé le « spectre » de l'anneau (voir l'article de Jean Malgoire pages 30 à 37). Par exemple, pour l'anneau des entiers, Grothendieck construit une fonction pour chacun des nombres entiers.



Depuis a moins les années 1960, Grothendieck a adopté une manière de travailler inhabituelle, mais efficace. Il disait lui-même que « penser » et « écrire » ont le même sens et qu'il pouvait taper sur sa machine à écrire au même rythme que défilaient ses pensées. Pendant de nombreuses années, il s'asseyait ainsi tous les jours (ou plutôt toutes les nuits), souvent pendant plus de douze heures, devant sa machine à écrire, et développait ses idées et théories dans une forme très précise, bien que provisoire et encore lacunaire. Plus tard, il retravaillait lui-même ces textes, ou les donnait aux participants de son séminaire qui les figolaient, les rédigeaient et souvent les complétaient après de longues discussions avec lui.

C'est ainsi que se sont constitués le désormais célèbre « Séminaire de géométrie algébrique » et les fondamentaux « Éléments de géométrie algébrique » (EGA), dont la rédaction finale a été entreprise par son ancien professeur Dieudonné. Les EGA sont une œuvre mathématique très inhabituelle. On y

trouve surtout deux types d'énoncés. Les uns affirment que certaines choses sont finiment représentables, c'est-à-dire constructibles en un nombre fini d'étapes à partir d'un nombre fini d'éléments de base. Les autres stipulent que des diagrammes sont commutatifs, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel sont appliqués certaines fonctions, constructions, morphismes, etc., n'importe pas.

Il est possible de concrétiser les objets abstraits dont traitent ces théorèmes, mais ce serait considérer là des exemples isolés, et comme Grothendieck le répétait suffisamment, ils ne l'intéressaient pas. Il cherchait toujours à découvrir le cœur d'un problème, à le libérer de toute particularité, de toute hypothèse superflue et d'autres caractères secondaires. Il tendait ainsi toujours vers une plus grande généralité. Grothendieck avait la conviction presque mystique que lorsqu'un problème est vraiment mis à nu et reconnu dans sa nature, sa solution se présente presque d'elle-même, suivant des petits pas, naturels et presque triviaux.

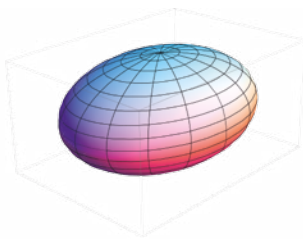
La plupart des personnes qui veulent rendre compréhensibles (à eux-mêmes ou à d'autres) des faits, des principes, des théories ou des problèmes généraux cherchent d'abord un exemple concret, instructif et aussi simple que possible. Grothendieck était complètement étranger à cette idée. Dans l'ensemble de ses travaux de géométrie algébrique, il n'y a aucun exemple. Bien qu'il ne l'ait jamais dit explicitement, il semblait penser que considérer des exemples détourne le regard des vrais principes fondamentaux et du cœur propre des choses. Grothendieck était probablement le seul à avoir cette conviction.

Pour la géométrie algébrique, de grands acquis plus récents, comme la preuve des conjectures de Weil par Pierre Deligne en 1974, la démonstration de la conjecture de Mordell par Gerd Faltings en 1984 et la résolution du grand théorème de Fermat par Andrew Wiles en 1994 auraient été littéralement impensables sans Grothendieck : tous ces travaux s'appuient sur le langage

Ainsi, comme dans l'anneau des polynômes, les éléments d'un anneau commutatif quelconque A deviennent des fonctions dont le domaine de définition est le spectre de A , ou $\text{Spec } A$. À partir de $\text{Spec } A$, Grothendieck définit un ensemble d'anneaux pour lesquels les propriétés trouvées sur A sont valides. Cet ensemble est donné par le « faisceau structural » de $\text{Spec } A$, une notion qui définit un pont entre un espace (ici, $\text{Spec } A$) et un ensemble d'objets (des anneaux) qui se ressemblent. $\text{Spec } A$ et son faisceau structural forment à eux deux une structure nommée schéma affine.

Troisième étape

Grothendieck construit un « schéma » à partir de ces schémas affines (en langage mathématique, un schéma est un espace localement annelé, localement isomorphe à un schéma affine). En pratique, le principe de construction est le même que celui, usuel, qui permet de



construire les variétés. Les surfaces de l'espace à trois dimensions, comme les plans, les sphéroïdes (ci-dessus), les hyperboloïdes, la surface d'un cornet de glace ou d'une bouée ont des formes qui sont globalement très différentes, mais localement, au voisinage de chaque point, elles ont toutes l'aspect d'un disque légèrement déformé. Réciproquement, on peut construire toute surface (et, de façon correspondante, toute variété de dimension supérieure) en prenant assez de disques puis en les recollant de telle façon qu'ils se chevauchent, afin d'obtenir la surface désirée. De façon analogue, un schéma est un

objet global construit par recollage de schémas affines. Là où ceux-ci se chevauchent, ils doivent se correspondre, suivant un sens à préciser. Pour cela, le travail mathématique à faire est minutieux, mais l'idée de base reste simple.

Les travaux de Grothendieck ont rapidement séduit : dès 1964, Heisuke Hironaka, futur lauréat de la médaille Fields, utilise cette construction dans un cours qu'il donne à l'université Columbia.

Depuis le XIX^e siècle, les mathématiciens discutaient pour savoir quel type d'anneaux commutatifs devait être considéré à la base de la géométrie algébrique. La réponse de Grothendieck est aussi simple que stupéfiante : il faut tous les considérer. C'est avec cette réponse qu'a été réussie une refonte complète et cohérente de la théorie, sans détour ni construction *ad hoc*. Grothendieck a tout de suite enregistré un premier succès : le fait de restreindre

l'attention, dans la théorie classique, à des anneaux vérifiant des conditions particulières impliquait la nécessité de restreindre également la classe des morphismes (applications reliant deux ensembles entre eux) entre anneaux que l'on y considérerait. En revanche, l'approche catégorique de Grothendieck permettait tout simplement de considérer tous les morphismes, sans restriction.

Puisque les schémas sont une généralisation des variétés algébriques, chaque notion afférente aux variétés peut être reformulée dans le cadre plus général des schémas. Cette approche a permis, par exemple, d'étudier des phénomènes délicats d'arithmétique ou de géométrie qui ne pouvaient être bien compris dans le cadre classique, et notamment de résoudre, comme l'a fait Gerd Faltings en 1983, la conjecture dite de Mordell (sur le nombre de solutions d'une équation polynomiale à coefficients rationnels).