

Depuis a moins les années 1960, Grothendieck a adopté une manière de travailler inhabituelle, mais efficace. Il disait lui-même que « penser » et « écrire » ont le même sens et qu'il pouvait taper sur sa machine à écrire au même rythme que défilaient ses pensées. Pendant de nombreuses années, il s'asseyait ainsi tous les jours (ou plutôt toutes les nuits), souvent pendant plus de douze heures, devant sa machine à écrire, et développait ses idées et théories dans une forme très précise, bien que provisoire et encore lacunaire. Plus tard, il retravaillait lui-même ces textes, ou les donnait aux participants de son séminaire qui les figuraient, les rédigeaient et souvent les complétaient après de longues discussions avec lui.

C'est ainsi que se sont constitués le désormais célèbre « Séminaire de géométrie algébrique » et les fondamentaux « Éléments de géométrie algébrique » (EGA), dont la rédaction finale a été entreprise par son ancien professeur Dieudonné. Les EGA sont une œuvre mathématique très inhabituelle. On y

trouve surtout deux types d'énoncés. Les uns affirment que certaines choses sont finiment représentables, c'est-à-dire constructibles en un nombre fini d'étapes à partir d'un nombre fini d'éléments de base. Les autres stipulent que des diagrammes sont commutatifs, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel sont appliquées certaines fonctions, constructions, morphismes, etc., n'importe pas.

Il est possible de concrétiser les objets abstraits dont traitent ces théorèmes, mais ce serait considérer là des exemples isolés, et comme Grothendieck le répétait suffisamment, ils ne l'intéressaient pas. Il cherchait toujours à découvrir le cœur d'un problème, à le libérer de toute particularité, de toute hypothèse superflue et d'autres caractères secondaires. Il tendait ainsi toujours vers une plus grande généralité. Grothendieck avait la conviction presque mystique que lorsqu'un problème est vraiment mis à nu et reconnu dans sa nature, sa solution se présente presque d'elle-même, suivant des petits pas, naturels et presque triviaux.

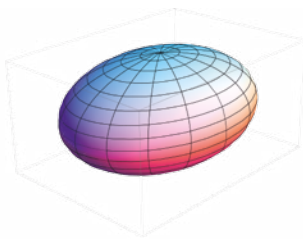
La plupart des personnes qui veulent rendre compréhensibles (à eux-mêmes ou à d'autres) des faits, des principes, des théories ou des problèmes généraux cherchent d'abord un exemple concret, instructif et aussi simple que possible. Grothendieck était complètement étranger à cette idée. Dans l'ensemble de ses travaux de géométrie algébrique, il n'y a aucun exemple. Bien qu'il ne l'ait jamais dit explicitement, il semblait penser que considérer des exemples détourne le regard des vrais principes fondamentaux et du cœur propre des choses. Grothendieck était probablement le seul à avoir cette conviction.

Pour la géométrie algébrique, de grands acquis plus récents, comme la preuve des conjectures de Weil par Pierre Deligne en 1974, la démonstration de la conjecture de Mordell par Gerd Faltings en 1984 et la résolution du grand théorème de Fermat par Andrew Wiles en 1994 auraient été littéralement impensables sans Grothendieck : tous ces travaux s'appuient sur le langage

Ainsi, comme dans l'anneau des polynômes, les éléments d'un anneau commutatif quelconque A deviennent des fonctions dont le domaine de définition est le spectre de A , ou $\text{Spec } A$. À partir de $\text{Spec } A$, Grothendieck définit un ensemble d'anneaux pour lesquels les propriétés trouvées sur A sont valides. Cet ensemble est donné par le « faisceau structural » de $\text{Spec } A$, une notion qui définit un pont entre un espace (ici, $\text{Spec } A$) et un ensemble d'objets (des anneaux) qui se ressemblent. $\text{Spec } A$ et son faisceau structural forment à eux deux une structure nommée schéma affine.

Troisième étape

Grothendieck construit un « schéma » à partir de ces schémas affines (en langage mathématique, un schéma est un espace localement annelé, localement isomorphe à un schéma affine). En pratique, le principe de construction est le même que celui, usuel, qui permet de



construire les variétés. Les surfaces de l'espace à trois dimensions, comme les plans, les sphéroïdes (ci-dessus), les hyperboloïdes, la surface d'un cornet de glace ou d'une bouée ont des formes qui sont globalement très différentes, mais localement, au voisinage de chaque point, elles ont toutes l'aspect d'un disque légèrement déformé. Réciproquement, on peut construire toute surface (et, de façon correspondante, toute variété de dimension supérieure) en prenant assez de disques puis en les recollant de telle façon qu'ils se chevauchent, afin d'obtenir la surface désirée. De façon analogue, un schéma est un

objet global construit par recollement de schémas affines. Là où ceux-ci se chevauchent, ils doivent se correspondre, suivant un sens à préciser. Pour cela, le travail mathématique à faire est minutieux, mais l'idée de base reste simple.

Les travaux de Grothendieck ont rapidement séduit : dès 1964, Heisuke Hironaka, futur lauréat de la médaille Fields, utilise cette construction dans un cours qu'il donne à l'université Columbia.

Depuis le XIX^e siècle, les mathématiciens discutaient pour savoir quel type d'anneaux commutatifs devait être considéré à la base de la géométrie algébrique. La réponse de Grothendieck est aussi simple que stupéfiante : il faut tous les considérer. C'est avec cette réponse qu'a été réussie une refonte complète et cohérente de la théorie, sans détour ni construction *ad hoc*. Grothendieck a tout de suite enregistré un premier succès : le fait de restreindre

l'attention, dans la théorie classique, à des anneaux vérifiant des conditions particulières impliquait la nécessité de restreindre également la classe des morphismes (applications reliant deux ensembles entre eux) entre anneaux que l'on y considérerait. En revanche, l'approche catégorique de Grothendieck permettait tout simplement de considérer tous les morphismes, sans restriction.

Puisque les schémas sont une généralisation des variétés algébriques, chaque notion afférente aux variétés peut être reformulée dans le cadre plus général des schémas. Cette approche a permis, par exemple, d'étudier des phénomènes délicats d'arithmétique ou de géométrie qui ne pouvaient être bien compris dans le cadre classique, et notamment de résoudre, comme l'a fait Gerd Faltings en 1983, la conjecture dite de Mordell (sur le nombre de solutions d'une équation polynomiale à coefficients rationnels).

et les outils de la géométrie algébrique tels qu'ils ont été définis par Grothendieck.

En 1970 s'est produit ce que Grothendieck a souvent appelé par la suite le « grand tournant » de sa vie, avec l'abandon de son poste à l'IHES après qu'il eut découvert que cet institut était financé en partie par le ministère français de la Défense, ce qui était incompatible avec ses convictions pacifistes et de gauche.

Cette raison avancée par Grothendieck lui-même n'explique pourtant pas tout. En effet, il abandonna non seulement son poste mais, peu de temps après, la recherche mathématique en général. S'il ne s'était agi que du financement de l'institut, il aurait pu trouver partout dans le monde des lieux d'activité n'allant pas à l'encontre de ses convictions morales.

De plus, il se sépara de sa femme Mireille Dufour et de leurs trois enfants, quitta Paris pour la campagne et se fixa – temporairement – de nouveaux objectifs. Il avait deux autres fils issus de ses nombreuses relations. Au fil des ans, ses rapports avec eux et leurs mères deviendront de plus en plus distants, tant et si bien qu'il ne les verra presque plus au cours de ses dernières décennies.

Inspiré par la révolution estudiantine de Mai 1968, par le mouvement écologiste alors naissant et le mouvement hippie américain, et en réaction à la guerre du Vietnam, Grothendieck fonda un groupe dénommé Survivre et militant pour la protection de l'environnement, opposé à toute forme de militarisme et en quête de nouvelles manières de vivre. Durant plus de deux ans, il en fut l'acteur principal et le chef de file financier.

Parallèlement, il fut professeur invité au Collège de France, à l'université Paris-Sud à Orsay, à Buffalo (États-Unis) et à Kingston (Canada), mais il était beaucoup moins engagé dans les mathématiques – ce qui signifie tout de même qu'il avait encore une activité supérieure à celle d'un professeur normal. De temps à autre, il faisait gagner à Survivre d'éminents alliés, mais le groupe ne prit jamais son envol et périclita lorsque Grothendieck, déçu, s'en détourna.

En 1973, Grothendieck s'installa successivement dans plusieurs petits villages du sud de la France. Il fut très marqué par un groupe de moines mendiants bouddhistes qui lui vinrent en aide de diverses façons. Il se lia aussi superficiellement avec des communautés de marginaux qui s'étaient installés à la campagne. Les membres de ces

Les documents de Grothendieck cachent-ils encore des découvertes ?

Alexandre Grothendieck a laissé après sa mort des dizaines de milliers de documents inexplorés : le fruit de ses méditations, sa correspondance retrouvée dans sa maison de Lasserre et des travaux mathématiques légués, en 1990, de son vivant, à l'un de ses anciens étudiants, Jean Malgoire, qui les a soigneusement conservés avant de les confier à l'université de Montpellier.

Jean Malgoire, dans quelles circonstances Alexandre Grothendieck vous a-t-il transmis ces archives qu'il aimait appeler ses « gribouillis » ?

Jean Malgoire : En juillet 1990, Alexandre Grothendieck m'appelle pour me demander si j'accepterais de venir récupérer sa bibliothèque mathématique, car il allait déménager et souhaitait profiter de l'occasion pour s'alléger. Heureux de mon accord, il me recommande surtout de venir avec un véhicule spacieux. Le lendemain, je le trouve assez excité, heureux de se projeter dans une nouvelle vie, avec des propos pleins de références mystiques. Il me propose, en plus de sa bibliothèque, d'emporter tous ses documents mathématiques (manuscrits, tapuscrits, nombreuses correspondances, prépublications...) et

m'aide à remplir la voiture. Il me montre aussi un grand bidon rempli de cendres où il a, dit-il, brûlé de nombreux papiers personnels. Il montrait, dans son élan mystique (j'ai quelques scrupules à parler de délire mystique), un parfait détachement pour ces documents et il me l'a précisé en me recommandant, je le cite : « Si tu souhaites un jour t'en débarrasser, ne les abandonne pas au bord d'une route, mais apporte-les dans un centre de recyclage... »

Je pensais alors qu'il souhaiterait probablement que je lui restitue tout ou partie de ces documents quand il serait sorti de cette période mystique. Mais il ne l'a pas fait. Et en 1995, je l'ai retrouvé pour l'informer de mon souhait de diffuser, avec son accord, la transcription (partielle) de l'un de ses manuscrits inédits :

La Longue marche à travers la théorie de Galois. Il a alors rédigé à mon intention un pouvoir qui allait beaucoup plus loin que ma demande, car il s'appliquait à tous les manuscrits donnés en 1990 (avec l'argument : « Tu n'auras pas à te [ou me ?] déranger chaque fois que tu souhaiteras diffuser un texte »). Il m'a aussi donné d'autres documents « oubliés en 1990 », dont le principal (en volume) était le manuscrit de *La théorie des dérivateurs* (2300 pages qui ont été depuis transcrites, éditées et diffusées).

Où en sont les travaux de numérisation et de déchiffrement ?

J. M. : Le nettoyage, le reconditionnement, l'inventaire détaillé des documents ainsi que leur numérisation sont terminés. Ce travail a été financé par la Région et l'université de Montpellier, et a été réalisé par les services de la bibliothèque interuniversitaire. Grâce à la connaissance que j'ai de ces documents, j'ai aidé à la réalisation de l'inventaire. La transcription n'était pas programmée dans cette première phase centrée sur la préservation et la conservation des documents.

Elle sera abordée dans un deuxième temps : cela prendra des années et l'aide de nombreux mathématiciens sera sollicitée.

Pensez-vous que ces archives recèlent des découvertes mathématiques déterminantes ?

J. M. : Parmi les manuscrits, deux tiers sont complètement inédits et attendus avec beaucoup d'intérêt par la communauté des mathématiciens. Rappelons que Grothendieck, s'il avait cessé de publier depuis le début des années 1970, n'avait pas arrêté pour autant de produire des mathématiques.

Qu'advient-il actuellement des dizaines de milliers de pages retrouvées dans sa maison ?

J. M. : Les plus de 60 000 pages retrouvées chez lui constituent le fonds dit de Lasserre que Grothendieck a légué par testament à la BNF en 1997. Celle-ci, à ma connaissance, a accepté le legs, et est en cours de négociation avec les héritiers pour régler les conditions financières et juridiques de ce legs.

– **Propos recueillis par Lydia Ben Ytzhak**