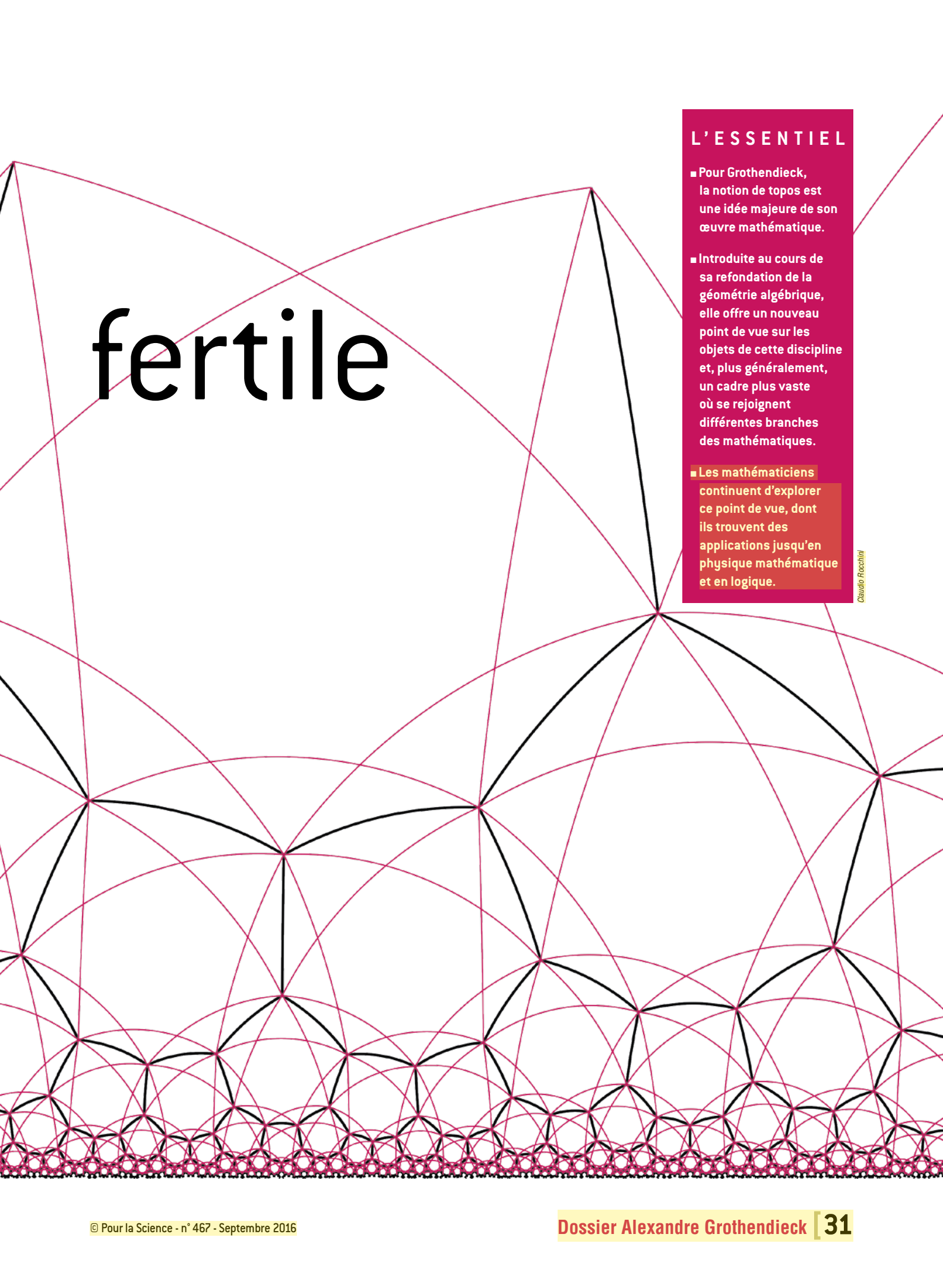




fertile

L'ESSENTIEL

■ Pour Grothendieck, la notion de topos est une idée majeure de son œuvre mathématique.

■ Introduite au cours de sa refondation de la géométrie algébrique, elle offre un nouveau point de vue sur les objets de cette discipline et, plus généralement, un cadre plus vaste où se rejoignent différentes branches des mathématiques.

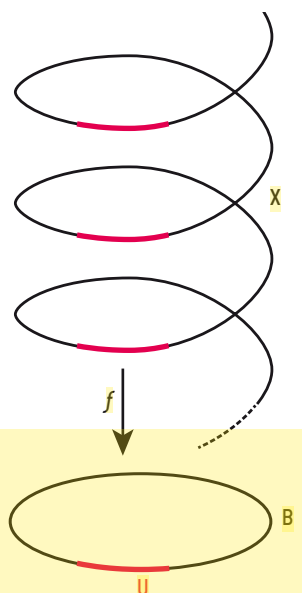
■ Les mathématiciens continuent d'explorer ce point de vue, dont ils trouvent des applications jusqu'en physique mathématique et en logique.

Claudio Rocchini

UN REVÊTEMENT ÉTALE DU CERCLE

Un revêtement étale d'un espace topologique B est un espace (X, f) au-dessus de B (c'est-à-dire un espace X muni d'une application f continue de X dans B) qui vérifie la propriété suivante: il existe un recouvrement de B par des ouverts U (c'est-à-dire une famille d'ouverts U de B dont la réunion donne B) tels que, pour tout U , la partie de X au-dessus de U est une réunion de copies de U . On dit qu'un tel U trivialise le revêtement.

Par exemple, l'enroulement de la droite réelle sur le cercle est un revêtement étale. Dans cet exemple, B est un cercle, X la droite réelle et f « l'enroulement de corde sur la poulie définie par le cercle », représenté comme une projection verticale (voir la figure ci-contre, où un ouvert U a été représenté). La notion de revêtement est fondamentale en topologie et la classification des revêtements d'un espace donné est souvent un des premiers chapitres des traités de topologie algébrique.



démarche; et cela dans un langage « non technique », accessible à des lecteurs non mathématiciens auxquels il s'adresse individuellement: « [...]aussi si tu "accroches" à ce que je vois à dire sur mon œuvre (et sûrement alors quelque chose de l'image en moi "passera" bel et bien), tu pourras te flatter d'avoir mieux saisi ce qui fait l'essentiel dans mon œuvre, qu'aucun peut-être de mes savants collègues ». Peut-on rêver meilleur guide ?

Au fil de sa promenade, Grothendieck cite une liste des douze idées maîtresses de son œuvre mathématique. Parmi ces thèmes, explique-t-il, certains sont à l'état embryonnaire, d'autres sont encore dans leur enfance, mais la moitié ont atteint une telle maturité que « parmi la gent géomètre surtout, "tout le monde" de nos jours les entonne sans même plus le savoir (comme Monsieur Jourdain faisait de la prose), à longueur de journée et à tout moment ». La notion de topos est l'un de ces thèmes, et pas n'importe lequel. Pour Grothendieck, il s'agit de l'idée majeure de son œuvre, la plus vaste par sa portée :

Le thème du topos [...] est ce « lit », ou cette « rivière profonde », où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des

structures « discontinues » ou « discrètes » [...]. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une « essence » commune à des situations les plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.

C'est aussi une porte d'entrée vertigineuse dans la pensée mathématique de Grothendieck.

En 1958, le mathématicien, devenu célèbre après avoir démontré une généralisation du théorème de Riemann-Roch (voir l'article de Winfried Scharlau, pages 22 à 29), pose les bases d'une géométrie nouvelle en introduisant la notion de schéma. À l'époque, la géométrie algébrique est divisée en plusieurs domaines aux interactions limitées : des domaines où les objets sont perçus comme continus (géométrie analytique, géométrie algébrique classique sur le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes) et d'autres où ils sont discontinus (géométrie arithmétique sur les corps finis, par exemple).

Les schémas fournissent une autre façon, généralisée, de voir les objets de la géométrie algébrique, c'est-à-dire les variétés algébriques – par exemple des surfaces définies par une équation polynomiale telle

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (équation d'une sphère); cette vision permet d'englober même les structures discontinues – discrètes – de la géométrie arithmétique (voir l'article de Winfried Scharlau).

Pour Grothendieck, les schémas constituent ainsi « le cœur » de la nouvelle géométrie, l'outil qui unifie les géométries algébrique et arithmétique. Mais ce sont les topos, notion introduite en 1963, qui forment « la demeure » de la nouvelle géométrie. Les topos sont une métamorphose de la notion d'espace. Ils permettent d'appliquer une vision topologique subtile aux objets de la géométrie algébrique (les variétés ou leur généralisation, les schémas). Les schémas et les topos créent en quelque sorte un pont entre le discret et le continu.

Dans l'histoire du concept mathématique d'espace, les topos constituent un dépaysement soudain, explique Grothendieck :

La notion d'« espace » est sans doute une des plus anciennes en mathématique. Elle est si fondamentale dans notre appréhension « géométrique » du monde, qu'elle est restée plus ou moins tacite pendant plus de deux millénaires. [...] Jusqu'à l'apparition du point de vue des topos, vers la fin des années cinquante, l'évolution de la notion d'espace m'apparaît comme une évolution essentiellement « continue ». [...] Certes, des changements profonds ont eu lieu dans la façon dont le mathématicien ou le « philosophe de la nature » concevait « l'espace ». Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une « continuité » essentielle – ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain.

Et pourtant, les précédentes évolutions de la notion d'espace offraient déjà des changements conceptuels considérables.

Les métamorphoses de la notion d'espace

D'abord au XVII^e siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées cartésiennes, les figures géométriques se sont métamorphosées en équations: le cercle réapparaît sous la forme « $x^2 + y^2 = 1$ ». La représentation de l'espace au moyen des nombres est une transformation que l'on peut qualifier de radicale (et qui continue de dérouter les étudiants...).

Puis au XIX^e siècle, le mathématicien allemand Bernhard Riemann introduit la notion de variété abstraite, un espace qui