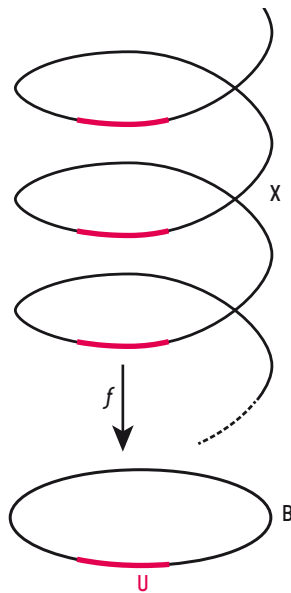


UN REVÊTEMENT ÉTALE DU CERCLE

Un revêtement étale d'un espace topologique B est un espace (X, f) au-dessus de B (c'est-à-dire un espace X muni d'une application f continue de X dans B) qui vérifie la propriété suivante: il existe un recouvrement de B par des ouverts U (c'est-à-dire une famille d'ouverts U de B dont la réunion donne B) tels que, pour tout U , la partie de X au-dessus de U est une réunion de copies de U . On dit qu'un tel U trivialise le revêtement.

Par exemple, l'enroulement de la droite réelle sur le cercle est un revêtement étale. Dans cet exemple, B est un cercle, X la droite réelle et f « l'enroulement de corde sur la poulie définie par le cercle », représenté comme une projection verticale (voir la figure ci-contre, où un ouvert U a été représenté). La notion de revêtement est fondamentale en topologie et la classification des revêtements d'un espace donné est souvent un des premiers chapitres des traités de topologie algébrique.



démarche; et cela dans un langage « non technique », accessible à des lecteurs non mathématiciens auxquels il s'adresse individuellement: « [...]aussi si tu "accroches" à ce que je vois à dire sur mon œuvre (et sûrement alors quelque chose de l'image en moi "passera" bel et bien), tu pourras te flatter d'avoir mieux saisi ce qui fait l'essentiel dans mon œuvre, qu'aucun peut-être de mes savants collègues ». Peut-on rêver meilleur guide?

Au fil de sa promenade, Grothendieck cite une liste des douze idées maîtresses de son œuvre mathématique. Parmi ces thèmes, explique-t-il, certains sont à l'état embryonnaire, d'autres sont encore dans leur enfance, mais la moitié ont atteint une telle maturité que « parmi la gent géomètre surtout, "tout le monde" de nos jours les entonne sans même plus le savoir (comme Monsieur Jourdain faisait de la prose), à longueur de journée et à tout moment ». La notion de topos est l'un de ces thèmes, et pas n'importe lequel. Pour Grothendieck, il s'agit de l'idée majeure de son œuvre, la plus vaste par sa portée:

Le thème du topos [...] est ce « lit », ou cette « rivière profonde », où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des

structures « discontinues » ou « discrètes » [...]. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une « essence » commune à des situations les plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.

C'est aussi une porte d'entrée vertigineuse dans la pensée mathématique de Grothendieck.

En 1958, le mathématicien, devenu célèbre après avoir démontré une généralisation du théorème de Riemann-Roch (voir l'article de Winfried Scharlau, pages 22 à 29), pose les bases d'une géométrie nouvelle en introduisant la notion de schéma. À l'époque, la géométrie algébrique est divisée en plusieurs domaines aux interactions limitées: des domaines où les objets sont perçus comme continus (géométrie analytique, géométrie algébrique classique sur le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes) et d'autres où ils sont discontinus (géométrie arithmétique sur les corps finis, par exemple).

Les schémas fournissent une autre façon, généralisée, de voir les objets de la géométrie algébrique, c'est-à-dire les variétés algébriques – par exemple des surfaces définies par une équation polynomiale telle

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (équation d'une sphère); cette vision permet d'englober même les structures discontinues – discrètes – de la géométrie arithmétique (voir l'article de Winfried Scharlau).

Pour Grothendieck, les schémas constituent ainsi « le cœur » de la nouvelle géométrie, l'outil qui unifie les géométries algébrique et arithmétique. Mais ce sont les topos, notion introduite en 1963, qui forment « la demeure » de la nouvelle géométrie. Les topos sont une métamorphose de la notion d'espace. Ils permettent d'appliquer une vision topologique subtile aux objets de la géométrie algébrique (les variétés ou leur généralisation, les schémas). Les schémas et les topos créent en quelque sorte un pont entre le discret et le continu.

Dans l'histoire du concept mathématique d'espace, les topos constituent un dépaysement soudain, explique Grothendieck:

La notion d'« espace » est sans doute une des plus anciennes en mathématique. Elle est si fondamentale dans notre appréhension « géométrique » du monde, qu'elle est restée plus ou moins tacite pendant plus de deux millénaires. [...] Jusqu'à l'apparition du point de vue des topos, vers la fin des années cinquante, l'évolution de la notion d'espace m'apparaît comme une évolution essentiellement « continue ». [...] Certes, des changements profonds ont eu lieu dans la façon dont le mathématicien ou le « philosophe de la nature » concevait l'espace ». Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une « continuité » essentielle – ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain.

Et pourtant, les précédentes évolutions de la notion d'espace offraient déjà des changements conceptuels considérables.

Les métamorphoses de la notion d'espace

D'abord au XVII^e siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées cartésiennes, les figures géométriques se sont métamorphosées en équations: le cercle réapparaît sous la forme « $x^2 + y^2 = 1$ ». La représentation de l'espace au moyen des nombres est une transformation que l'on peut qualifier de radicale (et qui continue de dérouter les étudiants...).

Puis au XIX^e siècle, le mathématicien allemand Bernhard Riemann introduit la notion de variété abstraite, un espace qui

peut être décrit localement par une, deux trois ou même n coordonnées (espace à n dimensions). Avec Riemann, les variétés se dégagent des espaces ambiants dans lesquels elles sont plongées et prennent leur autonomie : il n'y a plus *a priori* d'extérieur naturel à une variété. Cela a permis par exemple à Einstein de concevoir l'Univers comme une variété qui ne soit pas *a priori* un espace euclidien (dont les lois sont celles de la géométrie traditionnelle d'Euclide). Le progrès est réel, mais la disparition du décor demande un certain effort d'abstraction.

Au début du XX^e siècle, les mathématiciens s'aperçoivent que dans les espaces métriques (c'est-à-dire munis d'une notion de distance entre les points), beaucoup de propriétés fondamentales (telle la connexité, qui est la propriété d'un espace d'être « d'un seul tenant », ou la « compacité ») ne dépendent pas de la métrique qu'ils portent, mais seulement des parties dites ouvertes de ces espaces. Une partie est dite ouverte si, dès qu'elle contient un point, elle contient une boule centrée en ce point. Par exemple, les ouverts de la droite réelle sont les réunions (quelconques) d'intervalles ouverts, et les ouverts du plan les réunions de disques ouverts, c'est-à-dire privés de leurs bords. De plus, les ouverts ont des propriétés intéressantes qui leur confèrent

une certaine stabilité : une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore un ouvert.

En 1914, le mathématicien allemand Felix Hausdorff s'appuie sur ces propriétés de stabilité pour définir la notion d'espace topologique : un espace topologique est un ensemble E muni d'un ensemble de parties de E appelées ouverts (ou parties ouvertes de E) vérifiant les deux propriétés suivantes : l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide sont des ouverts, et une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore ouverte. On dit que l'ensemble des ouverts de E est une topologie sur E . Des concepts antérieurs (comme ceux de variété ou d'espace métrique), la définition d'espace par Hausdorff ne conserve qu'une idée très affaiblie de proximité à travers le concept d'ouvert.

La notion d'espace topologique permet d'appliquer notre intuition « spatiale » à des situations sans métrique naturelle. Par exemple, en géométrie algébrique, grâce à Oscar Zariski, mathématicien d'origine russe de la génération précédant celle de Grothendieck, on sait associer à tout anneau A (c'est-à-dire à tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, par exemple l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ou les anneaux de polynômes) un espace

■ L'AUTEUR



Jean MALGOIRE, ancien élève de Grothendieck, est maître de conférences à l'université

de Montpellier.

Les premiers pas de la nouvelle géométrie

Avant les réflexions de Grothendieck et de son école, les objets de base de la géométrie algébrique étaient les anneaux de polynômes (à coefficients réels ou complexes) dont les éléments s'interprètent de manière assez évidente comme des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Grothendieck a voulu étendre à tous les anneaux (commutatifs) le champ de la géométrie algébrique. Pour cela, il fallait pouvoir, par analogie avec les anneaux de polynômes, considérer les éléments d'un anneau A quelconque comme des fonctions. C'était faisable, mais avec un certain prix à payer, comme le montre le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Pour considérer tout entier n de $\mathbb{Z}$ comme une fonction, il

suffit d'associer à n une fonction définie sur le spectre de $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des nombres premiers) par sa valeur en chaque nombre premier p . On pose cette valeur égale au résidu modulo p de n dans le corps fini $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire au reste de la division euclidienne de n par p . Le prix à payer est une différence essentielle avec le cas des anneaux de polynômes, car pour $\mathbb{Z}$, la fonction associée à n ne prend pas ses valeurs sur un corps unique comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais sur un

corps différent ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) pour chaque nombre premier p . Toute la difficulté consistait donc à rassembler de manière cohérente tous ces corps. Et bien sûr à faire de même pour chaque anneau (commutatif avec élément unité). C'est le formalisme des faisceaux (voir l'encadré page 34) qui a donné la solution à Grothendieck et qui l'a conduit au langage des schémas.

La notion de faisceau avait été introduite quelques années plus tôt, en 1946, par le mathématicien français Jean Leray. Prisonnier de guerre en Autriche, Leray participait à une université de captivité et, de peur d'être réquisitionné pour travailler à l'effort de guerre

allemand, il avait délaissé sa spécialité, l'hydrodynamique, plus proche d'applications potentielles, pour y donner un cours de topologie algébrique. Dans ce cours, il avait notamment cherché à reconstruire la topologie algébrique en se débarrassant des hypothèses inutiles. Dans la continuité de ses recherches, il avait conçu une première notion de faisceau sur un espace topologique, un outil qui lui permettait de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale. Jean-Pierre Serre a étendu ces méthodes à la géométrie algébrique, où Grothendieck les a utilisées et considérablement développées à son tour.