

peut être décrit localement par une, deux trois ou même n coordonnées (espace à n dimensions). Avec Riemann, les variétés se dégagent des espaces ambiants dans lesquels elles sont plongées et prennent leur autonomie : il n'y a plus *a priori* d'extérieur naturel à une variété. Cela a permis par exemple à Einstein de concevoir l'Univers comme une variété qui ne soit pas *a priori* un espace euclidien (dont les lois sont celles de la géométrie traditionnelle d'Euclide). Le progrès est réel, mais la disparition du décor demande un certain effort d'abstraction.

Au début du XX^e siècle, les mathématiciens s'aperçoivent que dans les espaces métriques (c'est-à-dire munis d'une notion de distance entre les points), beaucoup de propriétés fondamentales (telle la connexité, qui est la propriété d'un espace d'être « d'un seul tenant », ou la « compacité ») ne dépendent pas de la métrique qu'ils portent, mais seulement des parties dites ouvertes de ces espaces. Une partie est dite ouverte si, dès qu'elle contient un point, elle contient une boule centrée en ce point. Par exemple, les ouverts de la droite réelle sont les réunions (quelconques) d'intervalles ouverts, et les ouverts du plan les réunions de disques ouverts, c'est-à-dire privés de leurs bords. De plus, les ouverts ont des propriétés intéressantes qui leur confèrent

une certaine stabilité : une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore un ouvert.

En 1914, le mathématicien allemand Felix Hausdorff s'appuie sur ces propriétés de stabilité pour définir la notion d'espace topologique : un espace topologique est un ensemble E muni d'un ensemble de parties de E appelées ouverts (ou parties ouvertes de E) vérifiant les deux propriétés suivantes : l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide sont des ouverts, et une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection d'un nombre fini d'ouverts est encore ouverte. On dit que l'ensemble des ouverts de E est une topologie sur E . Des concepts antérieurs (comme ceux de variété ou d'espace métrique), la définition d'espace par Hausdorff ne conserve qu'une idée très affaiblie de proximité à travers le concept d'ouvert.

La notion d'espace topologique permet d'appliquer notre intuition « spatiale » à des situations sans métrique naturelle. Par exemple, en géométrie algébrique, grâce à Oscar Zariski, mathématicien d'origine russe de la génération précédant celle de Grothendieck, on sait associer à tout anneau A (c'est-à-dire à tout ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, par exemple l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ou les anneaux de polynômes) un espace

■ L'AUTEUR



Jean MALGOIRE, ancien élève de Grothendieck, est maître de conférences à l'université

de Montpellier.

Les premiers pas de la nouvelle géométrie

Avant les réflexions de Grothendieck et de son école, les objets de base de la géométrie algébrique étaient les anneaux de polynômes (à coefficients réels ou complexes) dont les éléments s'interprètent de manière assez évidente comme des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Grothendieck a voulu étendre à tous les anneaux (commutatifs) le champ de la géométrie algébrique. Pour cela, il fallait pouvoir, par analogie avec les anneaux de polynômes, considérer les éléments d'un anneau A quelconque comme des fonctions. C'était faisable, mais avec un certain prix à payer, comme le montre le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Pour considérer tout entier n de $\mathbb{Z}$ comme une fonction, il

suffit d'associer à n une fonction définie sur le spectre de $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des nombres premiers) par sa valeur en chaque nombre premier p . On pose cette valeur égale au résidu modulo p de n dans le corps fini $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire au reste de la division euclidienne de n par p . Le prix à payer est une différence essentielle avec le cas des anneaux de polynômes, car pour $\mathbb{Z}$, la fonction associée à n ne prend pas ses valeurs sur un corps unique comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais sur un

corps différent ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) pour chaque nombre premier p . Toute la difficulté consistait donc à rassembler de manière cohérente tous ces corps. Et bien sûr à faire de même pour chaque anneau (commutatif avec élément unité). C'est le formalisme des faisceaux (voir l'encadré page 34) qui a donné la solution à Grothendieck et qui l'a conduit au langage des schémas.

La notion de faisceau avait été introduite quelques années plus tôt, en 1946, par le mathématicien français Jean Leray. Prisonnier de guerre en Autriche, Leray participait à une université de captivité et, de peur d'être réquisitionné pour travailler à l'effort de guerre

allemand, il avait délaissé sa spécialité, l'hydrodynamique, plus proche d'applications potentielles, pour y donner un cours de topologie algébrique. Dans ce cours, il avait notamment cherché à reconstruire la topologie algébrique en se débarrassant des hypothèses inutiles. Dans la continuité de ses recherches, il avait conçu une première notion de faisceau sur un espace topologique, un outil qui lui permettait de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale. Jean-Pierre Serre a étendu ces méthodes à la géométrie algébrique, où Grothendieck les a utilisées et considérablement développées à son tour.

topologique $\text{Spec } A$ appelé spectre de A . L'espace $\text{Spec } A$ n'a pas de métrique naturelle (c'est-à-dire de fonction définissant une distance entre les éléments de $\text{Spec } A$) qui donnerait les ouverts de $\text{Spec } A$. Pourtant, la topologie de Zariski qui définit $\text{Spec } A$ en fait bien un espace topologique : pour $\mathbb{Z}$, par exemple, ce spectre est l'ensemble des nombres premiers auquel on adjoint 0, et ses ouverts sont la partie vide et les complémentaires des ensembles formés d'un nombre fini de nombres premiers. Pour un anneau quelconque, le spectre est l'ensemble des « idéaux premiers » (qui sont une généralisation des nombres premiers).

Avec le concept d'espace topologique, les mathématiciens ont vraiment l'impression d'avoir atteint un degré de généralité maximal, en quelque sorte indépassable. De fait, grâce à sa souplesse et à sa simplicité,

le concept connaît un grand succès et continue d'être le cadre naturel de la topologie générale. Aussi, si les limitations de cette notion d'espace sont apparues assez naturellement à Grothendieck à la fin des années 1950, il a fallu faire un effort conceptuel considérable pour imaginer comment les dépasser.

Un manque cruel d'ouverts

Pour Grothendieck, les limitations se font particulièrement sentir dans le cadre de la topologie (l'ensemble d'ouverts) que Zariski a définie, par extension, pour les variétés algébriques, car si elle est suffisante pour beaucoup de propos, elle « manque cruellement d'ouverts » : par exemple sur une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$, les seuls

ouverts non vides pour la topologie de Zariski sont les complémentaires des parties finies de la courbe. Si l'on prend comme courbe la droite affine sur $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire le spectre de l'anneau des polynômes à une variable et à coefficients dans $\mathbb{C}$), on trouve l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et ses ouverts pour la topologie de Zariski sont la partie vide et les complémentaires des parties finies de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire le plan privé d'un nombre fini de points. Tous les ouverts (à part le vide) sont donc très gros : on ne peut pas avoir de « petits » voisinages d'un point. En revanche, pour la topologie ordinaire sur le plan complexe, les ouverts sont les réunions quelconques de disques ouverts ; il y a donc beaucoup plus d'ouverts ! Par exemple, autour de chaque point, on peut prendre pour voisinages du point des disques ouverts de rayons aussi petits que l'on souhaite. Ainsi, des espaces X au-dessus d'une variété complexe – c'est-à-dire munis d'une application continue de X vers la variété – peuvent être localement très simples pour la topologie ordinaire sans l'être pour la topologie de Zariski.

Pour pallier cette difficulté, Grothendieck élargit la notion de topologie sur une variété en étendant celle des ouverts à prendre en compte. Il ne se limite plus aux parties ouvertes de la variété, mais accepte aussi certains espaces au-dessus des ouverts, appelés revêtements étales d'ouverts (voir l'encadré page 32).

Cette notion remonte en quelque sorte à Riemann et aux surfaces qu'il inventa au XIX^e siècle pour faciliter l'étude des fonctions multiformes, c'est-à-dire des fonctions mal définies parce qu'elles associent plusieurs valeurs à une même valeur de la variable. Puisque les fonctions donnaient plusieurs valeurs en un même point de l'espace de départ, Riemann a transformé l'espace de départ en feuillets superposés et recollés de telle façon que sur la nouvelle surface constituée – appelée depuis surface de Riemann –, la fonction n'associe plus qu'une seule valeur à chaque valeur de la variable.

D'après Luc Illusie, ancien élève de Grothendieck, l'idée de la localisation étale chez son maître remonte à avril 1958, à l'occasion d'un exposé de Jean-Pierre Serre au séminaire Chevalley. Jean-Pierre Serre avait remarqué qu'élargir la localisation d'un espace au-dessus d'une variété algébrique à des revêtements étales d'ouverts permettait de révéler certaines de ses propriétés. Enthousiaste, Grothendieck

La notion de faisceau

Un faisceau sur un espace topologique B n'est rien d'autre qu'un espace étalé sur B , une notion qui s'apparente à celle de revêtement étale (voir l'encadré page 32), mais qui est plus faible.

Un espace étalé sur B est un espace (E, p) au-dessus de B où p est une application qui a la propriété d'être un homéomorphisme local : autour de chaque point x de E , il existe un ouvert U de E le contenant tel que U soit une copie de son image $V = p(U)$ dans B .

Par exemple, les revêtements étales sont des espaces étales, mais la réciproque est fautive : l'inclusion de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ dans la droite réelle $\mathbb{R}$ fait de lui un espace étalé sur $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un revêtement de $\mathbb{R}$ (il y a un problème au-dessus de 0 et 1...).

En quelque sorte, pour un revêtement étale, on demande d'être très simple « localement en bas »,

c'est-à-dire sur B , et pour un espace étalé, on demande d'être très simple « localement en haut », c'est-à-dire sur E , ce qui est une condition plus faible.

À un tel espace étalé (E, p) sur B , associons un foncteur F_E défini sur l'ensemble des ouverts de B (c'est une catégorie) et à valeurs dans la catégorie des ensembles. Formellement, cela signifie qu'à tout ouvert U de B , on associe l'ensemble $F_E(U)$ des fonctions continues de U dans E qui, composées avec p , donnent l'identité de U . Alors pour U et V deux ouverts quelconques de B tels que V est inclus dans U , on a une application dite de restriction de $F_E(U)$ dans $F_E(V)$ qui, à chaque fonction sur U , associe sa restriction sur V .

On vérifie facilement que E peut être reconstitué à partir de F_E . On vérifie aussi la propriété fondamentale suivante sur F_E , dite propriété de recollement : si (U_i) est un recouvrement d'un ouvert U

de B (c'est-à-dire une famille d'ouverts U_i dont la réunion donne U) et si on s'est donné pour chaque i un élément s_i de $F_E(U_i)$ tel que les s_i soient compatibles deux à deux (pour tout i et j , les restrictions de s_i et de s_j sur l'intersection de U_i et U_j coïncident, alors il existe un et un seul élément s dans $F_E(U)$ dont les restrictions à chaque U_i sont précisément les s_i .

En résumé, des données « locales » compatibles (les s_i) permettent de définir une donnée « globale » unique (s) dans $F_E(U)$.

On part de cette définition de foncteur associé à un espace étalé pour définir la notion générale de faisceau sur un espace topologique B : un faisceau sur B est un foncteur sur la catégorie des ouverts de B vérifiant la propriété de recollement.

Cette propriété est ce qui permet de construire des objets globaux à partir de données locales – un outil d'une grande utilité en géométrie algébrique.