

a repris l'idée pour élargir la topologie de Zariski. Il voyait même déjà comment cet élargissement aiderait à s'attaquer aux conjectures de Weil.

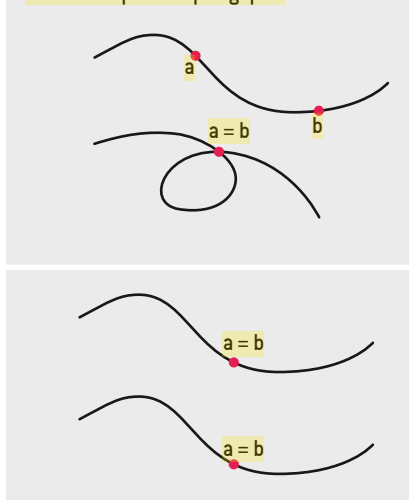
Depuis leur formulation, en 1949, par André Weil, un des membres fondateurs du groupe de mathématiciens Bourbaki (que Grothendieck a rejoint au début des années 1950), ces conjectures font miroiter l'idée que des relations existent entre des informations de nature arithmétique et la topologie. Weil les a énoncées alors qu'il menait des calculs sur le nombre de solutions de certaines équations algébriques dans des ensembles finis de nombres. En substance, les conjectures de Weil relient le nombre de certaines solutions d'une équation algébrique à des propriétés topologiques de la variété algébrique décrite par l'équation. Cette relation entre informations arithmétiques et topologie suggérait de construire une théorie plus subtile – une théorie cohomologique – qui permettrait d'englober les propriétés arithmétiques et topologiques de la variété. Grothendieck construira une telle théorie quelques années plus tard (la cohomologie étale) et prouvera une partie des conjectures ; la dernière sera démontrée en 1974 par son élève Pierre Deligne et lui vaudra une médaille Fields.

La genèse des topos

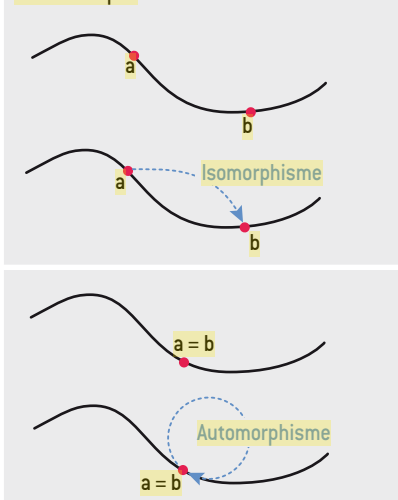
Cependant, en 1958, pris par le considérable travail de refondation de la géométrie algébrique qu'il a entrepris, Grothendieck ne développe pas tout de suite ses idées sur la localisation étale. Tout est dans sa tête, mais il n'y revient que quelques années plus tard, en 1963, avec le démarrage du séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie n° 4 (SGA4) à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), à Bures-sur-Yvette, consacré... à sa nouvelle géométrie. Grothendieck donne alors un cadre mathématique formel à l'idée de localisation étale. Les deux principaux outils qu'il utilise pour cela sont le langage des catégories et la théorie des faisceaux.

La notion de catégorie a été introduite en 1945 par les Américains Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane. Elle formalise la notion de classe d'objets, c'est-à-dire d'objets de même nature, et de relations entre ces objets. Une catégorie est d'abord un graphe orienté – des objets et des flèches entre ces objets, qu'on appelle morphismes. Mais on a en plus une composition des

Dans les espaces topologiques



Dans les topos



LES TOPOS FONT DISPARAÎTRE LES CAS PARTICULIERS. Par exemple, pour identifier deux points a et b d'un segment dans le cadre classique des espaces topologiques, on fait une boucle avec le segment pour faire coïncider a et b , sauf dans le cas particulier où a et b sont confondus. Dans ce cas particulier, rien ne se passe. En revanche, dans le cadre des topos, pour identifier deux points sur un segment, on les recolle au moyen d'un isomorphisme, qui relie les points a et b . Et si a et b sont confondus, l'isomorphisme existe toujours, c'est un automorphisme du point ; et on a encore une sorte de « boucle infinitésimale »...

flèches généralisant la composition des applications entre ensembles.

Parmi les catégories les plus usitées, citons la catégorie des ensembles (les flèches sont alors les applications entre ensembles), ou celles des groupes, des anneaux, des espaces topologiques, etc. De même, si E est un espace topologique muni d'un ensemble $\text{Ouv}(E)$ d'ouverts, alors $\text{Ouv}(E)$ est, de manière naturelle, une catégorie (avec pour tout couple d'ouverts U et V tels que V inclus dans U , un seul et unique morphisme de V vers U : l'application inclusion de V dans U).

La « philosophie » des catégories est de mettre l'accent sur les morphismes plutôt que sur les objets eux-mêmes : deux objets isomorphes dans une catégorie sont, du point de vue catégorique, « interchangeables ». Et un objet est connu si l'on connaît ses relations à tous les autres objets. Ce résultat élémentaire, mais fondamental, porte le nom de lemme de Yoneda et peut se traduire par : « Dis-moi qui tu fréquentes et je te dirai qui tu es. »

Bien évidemment, les mathématiciens s'intéressent aussi aux relations entre catégories. Celles-ci sont formalisées sous la forme de foncteurs, des analogues des applications entre ensembles qui permettent de transporter des objets et les relations entre eux d'un « cadre » (une catégorie) dans un autre (une autre catégorie).



RÉCOLTES ET SEMAILLES, où Grothendieck revient notamment sur son œuvre mathématique, n'a pour l'heure été publié qu'au Japon.

Jean-Michel Moreau