

a repris l'idée pour élargir la topologie de Zariski. Il voyait même déjà comment cet élargissement aiderait à s'attaquer aux conjectures de Weil.

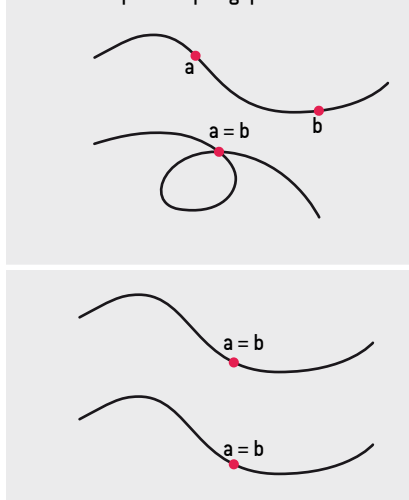
Depuis leur formulation, en 1949, par André Weil, un des membres fondateurs du groupe de mathématiciens Bourbaki (que Grothendieck a rejoint au début des années 1950), ces conjectures font miroiter l'idée que des relations existent entre des informations de nature arithmétique et la topologie. Weil les a énoncées alors qu'il menait des calculs sur le nombre de solutions de certaines équations algébriques dans des ensembles finis de nombres. En substance, les conjectures de Weil relient le nombre de certaines solutions d'une équation algébrique à des propriétés topologiques de la variété algébrique décrite par l'équation. Cette relation entre informations arithmétiques et topologie suggérait de construire une théorie plus subtile – une théorie cohomologique – qui permettrait d'englober les propriétés arithmétiques et topologiques de la variété. Grothendieck construira une telle théorie quelques années plus tard (la cohomologie étale) et prouvera une partie des conjectures ; la dernière sera démontrée en 1974 par son élève Pierre Deligne et lui vaudra une médaille Fields.

La genèse des topos

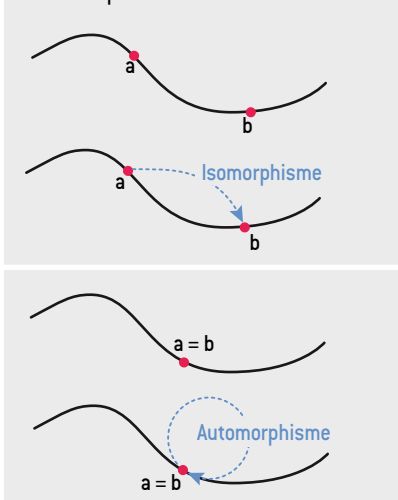
Cependant, en 1958, pris par le considérable travail de refondation de la géométrie algébrique qu'il a entrepris, Grothendieck ne développe pas tout de suite ses idées sur la localisation étale. Tout est dans sa tête, mais il n'y revient que quelques années plus tard, en 1963, avec le démarrage du séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie n° 4 (SGA4) à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), à Bures-sur-Yvette, consacré... à sa nouvelle géométrie. Grothendieck donne alors un cadre mathématique formel à l'idée de localisation étale. Les deux principaux outils qu'il utilise pour cela sont le langage des catégories et la théorie des faisceaux.

La notion de catégorie a été introduite en 1945 par les Américains Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane. Elle formalise la notion de classe d'objets, c'est-à-dire d'objets de même nature, et de relations entre ces objets. Une catégorie est d'abord un graphe orienté – des objets et des flèches entre ces objets, qu'on appelle morphismes. Mais on a en plus une composition des

Dans les espaces topologiques



Dans les topos



LES TOPOS FONT DISPARAÎTRE LES CAS PARTICULIERS. Par exemple, pour identifier deux points a et b d'un segment dans le cadre classique des espaces topologiques, on fait une boucle avec le segment pour faire coïncider a et b , sauf dans le cas particulier où a et b sont confondus. Dans ce cas particulier, rien ne se passe. En revanche, dans le cadre des topos, pour identifier deux points sur un segment, on les recolle au moyen d'un isomorphisme, qui relie les points a et b . Et si a et b sont confondus, l'isomorphisme existe toujours, c'est un automorphisme du point ; et on a encore une sorte de « boucle infinitésimale »...

flèches généralisant la composition des applications entre ensembles.

Parmi les catégories les plus usitées, citons la catégorie des ensembles (les flèches sont alors les applications entre ensembles), ou celles des groupes, des anneaux, des espaces topologiques, etc. De même, si E est un espace topologique muni d'un ensemble $\text{Ouv}(E)$ d'ouverts, alors $\text{Ouv}(E)$ est, de manière naturelle, une catégorie (avec pour tout couple d'ouverts U et V tels que V inclus dans U , un seul et unique morphisme de V vers U : l'application inclusion de V dans U).

La « philosophie » des catégories est de mettre l'accent sur les morphismes plutôt que sur les objets eux-mêmes : deux objets isomorphes dans une catégorie sont, du point de vue catégorique, « interchangeables ». Et un objet est connu si l'on connaît ses relations à tous les autres objets. Ce résultat élémentaire, mais fondamental, porte le nom de lemme de Yoneda et peut se traduire par : « Dis-moi qui tu fréquentes et je te dirai qui tu es. »

Bien évidemment, les mathématiciens s'intéressent aussi aux relations entre catégories. Celles-ci sont formalisées sous la forme de foncteurs, des analogues des applications entre ensembles qui permettent de transporter des objets et les relations entre eux d'un « cadre » (une catégorie) dans un autre (une autre catégorie).



RÉCOLTES ET SEMAILLES, où Grothendieck revient notamment sur son œuvre mathématique, n'a pour l'heure été publié qu'au Japon.

Jean Margre

L'autre outil clé que Grothendieck utilise est le concept de faisceau, introduite en 1946 par le mathématicien français Jean Leray. En substance, un faisceau sur un espace topologique est un foncteur qui a la propriété de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale (voir l'encadré page 34).

Grothendieck remarque que la notion centrale qui permet de définir ce qu'est un faisceau sur un espace topologique B est simplement la notion de recouvrement d'un ouvert par une famille d'ouverts. Si l'on veut élargir la notion d'ouvert à des objets au-dessus de B (par exemple à des revêtements d'ouverts pour la localisation étale), en d'autres termes, si l'on veut formaliser la notion d'ouvert pour pouvoir considérer les revêtements étales d'ouverts comme des ouverts, il faut élargir la notion de recouvrement à d'autres objets que les ouverts ordinaires.

En remarquant aussi que les ouverts d'un espace forment une catégorie, Grothendieck fait le saut de remplacer la catégorie des ouverts d'un espace par une catégorie quelconque C, munie pour tout objet d'une notion de recouvrement : c'est la donnée pour tout objet x de C de familles d'objets de C au-dessus de x, appelées familles couvrantes (de x). Grothendieck nomme site cette notion de catégorie munie de familles couvrantes, et l'ensemble des familles couvrantes constitue une topologie dite depuis de Grothendieck. La notion de faisceau sur un site C est alors absolument analogue à celle de faisceau sur un espace topologique : c'est un foncteur de la catégorie C dans celle des ensembles, qui vérifie la propriété du « passage du local au global » pour tout objet de C et toute famille couvrante de cet objet.

Grothendieck aurait pu s'arrêter là pour les besoins de la géométrie algébrique. Plusieurs sites ont été définis, dont le site dit étale qui a conduit à la cohomologie étale, grâce à laquelle les conjectures de Weil ont été démontrées. Le site étale et les faisceaux pour la topologie associée, la topologie étale, sont les objets qui ont cristallisé l'idée initiale de Grothendieck de la localisation étale. Mais il voit toujours plus loin. Pour lui, l'objet le plus intéressant, intrinsèque, associé à un site est la catégorie de tous les faisceaux sur la catégorie du site. C'est cette catégorie des faisceaux qu'il nomme topos.

Plus généralement, pour Grothendieck, un topos est une catégorie équivalente

à la catégorie des faisceaux sur un site. Cette nouvelle notion d'espace a deux propriétés importantes, explique-t-il dans *Récoltes et semailles* :

Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, car dans les [topos], les intuitions et les constructions « géométriques » les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque-là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature « topologico-géométrique ».

À chaque espace topologique X est associé un topos – la catégorie des faisceaux sur X. Cette correspondance est un foncteur. C'est ce foncteur, cette « traduction » que Grothendieck appelle « traversée du miroir » :

Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de « faisceau ») à exprimer une certaine notion (celle

d'« espace » en l'occurrence) en termes d'une autre (celle de « catégorie »). [...] Mais ici, il y a plus. [...] Il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces « catégories » sur lesquelles on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière. Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, qui les font s'apparenter à des sortes de « pastiches » de la plus simple imaginable d'entre elles – celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point.

Cette catégorie est précisément la catégorie des ensembles, car un faisceau sur un espace réduit à un point est un ensemble. Donc la catégorie des faisceaux sur un point est la catégorie des ensembles ! Ce qui a, sans doute, de quoi dépayser quelque peu : l'espace le plus réduit, le point, comme topos, est représenté par quelque chose d'aussi énorme que la catégorie des ensembles (que dans ce cadre on appelle plutôt topos ponctuel ou topos final). Ainsi, les topos sont des catégories

LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI

Le point de vue des topos éclaire d'un jour nouveau un célèbre « paradoxe », le « paradoxe de Banach-Tarski », et le fait même disparaître. Le théorème de Banach-Tarski entraîne l'existence d'une partition « paradoxale » de toute boule de rayon égal à 1 en quatre « pièces de Lego » identiques qui, prises deux à deux, permettent de reconstituer deux boules de rayon 1. Ces quatre pièces sont impossibles à dessiner, car on sait

seulement, par le théorème, qu'elles existent. Elle ne sont pas non plus mesurables, c'est-à-dire qu'on ne peut pas leur attribuer de volume, car sinon, en additionnant leurs volumes, on aboutirait à une contradiction du type $1 = 1 + 1...$ Et pourtant, ces pièces de Lego existent, dit le théorème.

En fait, le paradoxe s'évanouit dans le cadre des topos, comme l'a montré Olivier Leroy en 1995. La partition

ensembliste « paradoxale » n'est en effet plus une partition du point de vue toposique, car dans le cadre des topos, les pièces de Lego ne sont plus disjointes deux à deux : il existe des intersections de nature purement toposique (en fait, elles n'ont pas de points) qui rendent mesurables tous les sous-topos de la boule et lèvent la contradiction. La vision classique ne les voit pas, il faut chausser de nouvelles lunettes pour les déceler...

Dans les espaces topologiques



Dans les topos

