

L'autre outil clé que Grothendieck utilise est le concept de faisceau, introduite en 1946 par le mathématicien français Jean Leray. En substance, un faisceau sur un espace topologique est un foncteur qui a la propriété de relier entre elles des données locales pour en faire une donnée globale (voir l'encadré page 34).

Grothendieck remarque que la notion centrale qui permet de définir ce qu'est un faisceau sur un espace topologique B est simplement la notion de recouvrement d'un ouvert par une famille d'ouverts. Si l'on veut élargir la notion d'ouvert à des objets au-dessus de B (par exemple à des revêtements d'ouverts pour la localisation étale), en d'autres termes, si l'on veut formaliser la notion d'ouvert pour pouvoir considérer les revêtements étales d'ouverts comme des ouverts, il faut élargir la notion de recouvrement à d'autres objets que les ouverts ordinaires.

En remarquant aussi que les ouverts d'un espace forment une catégorie, Grothendieck fait le saut de remplacer la catégorie des ouverts d'un espace par une catégorie quelconque C, munie pour tout objet d'une notion de recouvrement : c'est la donnée pour tout objet x de C de familles d'objets de C au-dessus de x, appelées familles couvrantes (de x). Grothendieck nomme site cette notion de catégorie munie de familles couvrantes, et l'ensemble des familles couvrantes constitue une topologie dite depuis de Grothendieck. La notion de faisceau sur un site C est alors absolument analogue à celle de faisceau sur un espace topologique : c'est un foncteur de la catégorie C dans celle des ensembles, qui vérifie la propriété du « passage du local au global » pour tout objet de C et toute famille couvrante de cet objet.

Grothendieck aurait pu s'arrêter là pour les besoins de la géométrie algébrique. Plusieurs sites ont été définis, dont le site dit étale qui a conduit à la cohomologie étale, grâce à laquelle les conjectures de Weil ont été démontrées. Le site étale et les faisceaux pour la topologie associée, la topologie étale, sont les objets qui ont cristallisé l'idée initiale de Grothendieck de la localisation étale. Mais il voit toujours plus loin. Pour lui, l'objet le plus intéressant, intrinsèque, associé à un site est la catégorie de tous les faisceaux sur la catégorie du site. C'est cette catégorie des faisceaux qu'il nomme topos.

Plus généralement, pour Grothendieck, un topos est une catégorie équivalente

à la catégorie des faisceaux sur un site. Cette nouvelle notion d'espace a deux propriétés importantes, explique-t-il dans *Récoltes et semailles* :

Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, car dans les [topos], les intuitions et les constructions « géométriques » les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque-là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature « topologico-géométrique ».

À chaque espace topologique X est associé un topos – la catégorie des faisceaux sur X. Cette correspondance est un foncteur. C'est ce foncteur, cette « traduction » que Grothendieck appelle « traversée du miroir » :

Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de « faisceau ») à exprimer une certaine notion (celle

d'« espace » en l'occurrence) en termes d'une autre (celle de « catégorie »). [...] Mais ici, il y a plus. [...] Il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces « catégories » sur lesquelles on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière. Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, qui les font s'apparenter à des sortes de « pastiches » de la plus simple imaginable d'entre elles – celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point.

Cette catégorie est précisément la catégorie des ensembles, car un faisceau sur un espace réduit à un point est un ensemble. Donc la catégorie des faisceaux sur un point est la catégorie des ensembles ! Ce qui a, sans doute, de quoi dépayser quelque peu : l'espace le plus réduit, le point, comme topos, est représenté par quelque chose d'aussi énorme que la catégorie des ensembles (que dans ce cadre on appelle plutôt topos ponctuel ou topos final). Ainsi, les topos sont des catégories

LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI

Le point de vue des topos éclaire d'un jour nouveau un célèbre « paradoxe », le « paradoxe de Banach-Tarski », et le fait même disparaître. Le théorème de Banach-Tarski entraîne l'existence d'une partition « paradoxale » de toute boule de rayon égal à 1 en quatre « pièces de Lego » identiques qui, prises deux à deux, permettent de reconstituer deux boules de rayon 1. Ces quatre pièces sont impossibles à dessiner, car on sait

seulement, par le théorème, qu'elles existent. Elle ne sont pas non plus mesurables, c'est-à-dire qu'on ne peut pas leur attribuer de volume, car sinon, en additionnant leurs volumes, on aboutirait à une contradiction du type $1 = 1 + 1...$ Et pourtant, ces pièces de Lego existent, dit le théorème.

En fait, le paradoxe s'évanouit dans le cadre des topos, comme l'a montré Olivier Leroy en 1995. La partition

ensembliste « paradoxale » n'est en effet plus une partition du point de vue toposique, car dans le cadre des topos, les pièces de Lego ne sont plus disjointes deux à deux : il existe des intersections de nature purement toposique (en fait, elles n'ont pas de points) qui rendent mesurables tous les sous-topos de la boule et lèvent la contradiction. La vision classique ne les voit pas, il faut chausser de nouvelles lunettes pour les déceler...

Dans les espaces topologiques



Dans les topos



qui présentent « beaucoup de propriétés » de la catégorie des ensembles.

Pour Grothendieck, de l'autre côté du miroir entre les espaces ordinaires et les topos, du côté des topos, « le monde est plus beau ». Pour m'en donner une illustration, Olivier Leroy, un ancien élève de Grothendieck, m'avait expliqué il y a bien longtemps : « Passer des espaces topologiques aux topos, c'est comme passer de la géométrie affine à la géométrie projective : cela fait disparaître les cas particuliers. » (voir la figure page 35 et l'encadré page 36).

Plus généralement, le langage des topos permet de donner une représentation spatiale pertinente à des situations qui, classiquement, n'étaient pas associées à une telle représentation (principalement en algèbre). Par exemple, la théorie de Galois, qui portait originellement sur la résolubilité des équations algébriques, devient, dans le cadre des topos, un exemple de situation galoisienne que l'on rencontre dans beaucoup de domaines, comme la classification des revêtements d'un espace topologique.

Le langage des topos est devenu un outil fondamental pour un grand pan de la géométrie algébrique actuelle, notamment la géométrie algébrique dérivée. Continuation de la géométrie algébrique dans l'esprit de Grothendieck, cette géométrie est développée par des mathématiciens comme Jacob Lurie et Bertrand Toën en France. Ces mathématiciens ont même dépassé les « simples » topos et utilisent des notions de topos d'ordres supérieurs (les infini-topos, par exemple).

Certains essayent aussi de mieux comprendre les « espaces de modules », c'est-à-dire les espaces décrivant toutes les formes possibles d'objets d'un type géométrique donné, comme les courbes algébriques. Dans les années 1980, l'étude de l'espace algébrique de toutes les formes possibles de courbes, qui est en fait un topos et non un espace ordinaire, a été centrale dans le travail de Grothendieck.

Les applications de la théorie des topos vont aussi bien au-delà de la géométrie algébrique. Les physiciens théoriciens y voient un cadre naturel pour une logique quantique. Les logiciens, quant à eux, les utilisent pour construire des modèles de théories formelles : on peut voir chaque topos comme une sorte d'univers des ensembles avec sa propre logique. Comme application, on a pu construire un topos dans lequel l'hypothèse du continu n'est

pas vérifiée. Formulée au XIX^e siècle par le mathématicien allemand Georg Cantor, cette hypothèse affirme que si un ensemble présente un nombre d'éléments d'une infinité d'ordre supérieur à celle de l'ensemble des nombres naturels, alors il a au moins autant d'éléments que l'ensemble des nombres réels. La démonstration de cette hypothèse est le premier des 23 problèmes que le mathématicien allemand David Hilbert avait proposés en 1900 pour guider la recherche en mathématiques. En 1963, le mathématicien américain Paul Cohen avait montré que l'hypothèse ne peut se déduire des axiomes de la théorie des ensembles, ce qui lui avait valu la médaille Fields. La théorie des topos a permis de retrouver ce résultat de manière plutôt simple.

Nul besoin de points pour exister

Contrairement aux points des espaces topologiques, ceux des topos ne font pas partie de la structure, mais ils ne disparaissent pas forcément : un point d'un topos T est un morphisme du topos ponctuel (la catégorie des ensembles) dans T . Un topos non vide n'a donc pas forcément de point. En revanche, dans un topos, il peut y avoir des morphismes entre les points, comme dans la situation décrite dans la figure page 35.

D'une certaine manière, le théorème de Banach-Tarski (voir l'encadré page 36), si difficile à accepter dans le cadre classique et qui s'éclaire dans celui des topos, nous montre une certaine limite du choix qui prévaut depuis au moins Descartes, et qui consiste à modéliser (et même à penser !) l'espace comme un ensemble de points. Postulat d'ailleurs conforté par le point de vue ensembliste en vigueur depuis Cantor et Hilbert : dans les mathématiques « modernes », tous les objets sont des ensembles !

Le cadre des topos nous permet de sortir de ce carcan, car les topos n'ont pas besoin de points pour exister : il donne au mathématicien – comme s'il avait chaussé de nouvelles lunettes – un nouvel outil d'exploration, plus fin, faisant apparaître de nouveaux objets et apportant de nouvelles réponses à d'anciennes questions. ■

De l'autre côté du miroir

entre les espaces ordinaires et les topos, le monde est plus beau

■ BIBLIOGRAPHIE

Le site du Grothendieck Circle rassemble certaines œuvres inédites du mathématicien : www.grothendieckcircle.org/