

qui présentent « beaucoup de propriétés » de la catégorie des ensembles.

Pour Grothendieck, de l'autre côté du miroir entre les espaces ordinaires et les topos, du côté des topos, « le monde est plus beau ». Pour m'en donner une illustration, Olivier Leroy, un ancien élève de Grothendieck, m'avait expliqué il y a bien longtemps : « Passer des espaces topologiques aux topos, c'est comme passer de la géométrie affine à la géométrie projective : cela fait disparaître les cas particuliers. » (voir la figure page 35 et l'encadré page 36).

Plus généralement, le langage des topos permet de donner une représentation spatiale pertinente à des situations qui, classiquement, n'étaient pas associées à une telle représentation (principalement en algèbre). Par exemple, la théorie de Galois, qui portait originellement sur la résolubilité des équations algébriques, devient, dans le cadre des topos, un exemple de situation galoisienne que l'on rencontre dans beaucoup de domaines, comme la classification des revêtements d'un espace topologique.

Le langage des topos est devenu un outil fondamental pour un grand pan de la géométrie algébrique actuelle, notamment la géométrie algébrique dérivée. Continuation de la géométrie algébrique dans l'esprit de Grothendieck, cette géométrie est développée par des mathématiciens comme Jacob Lurie et Bertrand Toën en France. Ces mathématiciens ont même dépassé les « simples » topos et utilisent des notions de topos d'ordres supérieurs (les infini-topos, par exemple).

Certains essayent aussi de mieux comprendre les « espaces de modules », c'est-à-dire les espaces décrivant toutes les formes possibles d'objets d'un type géométrique donné, comme les courbes algébriques. Dans les années 1980, l'étude de l'espace algébrique de toutes les formes possibles de courbes, qui est en fait un topos et non un espace ordinaire, a été centrale dans le travail de Grothendieck.

Les applications de la théorie des topos vont aussi bien au-delà de la géométrie algébrique. Les physiciens théoriciens y voient un cadre naturel pour une logique quantique. Les logiciens, quant à eux, les utilisent pour construire des modèles de théories formelles : on peut voir chaque topos comme une sorte d'univers des ensembles avec sa propre logique. Comme application, on a pu construire un topos dans lequel l'hypothèse du continu n'est

pas vérifiée. Formulée au XIX^e siècle par le mathématicien allemand Georg Cantor, cette hypothèse affirme que si un ensemble présente un nombre d'éléments d'une infinité d'ordre supérieur à celle de l'ensemble des nombres naturels, alors il a au moins autant d'éléments que l'ensemble des nombres réels. La démonstration de cette hypothèse est le premier des 23 problèmes que le mathématicien allemand David Hilbert avait proposés en 1900 pour guider la recherche en mathématiques. En 1963, le mathématicien américain Paul Cohen avait montré que l'hypothèse ne peut se déduire des axiomes de la théorie des ensembles, ce qui lui avait valu la médaille Fields. La théorie des topos a permis de retrouver ce résultat de manière plutôt simple.

Nul besoin de points pour exister

Contrairement aux points des espaces topologiques, ceux des topos ne font pas partie de la structure, mais ils ne disparaissent pas forcément : un point d'un topos T est un morphisme du topos ponctuel (la catégorie des ensembles) dans T . Un topos non vide n'a donc pas forcément de point. En revanche, dans un topos, il peut y avoir des morphismes entre les points, comme dans la situation décrite dans la figure page 35.

D'une certaine manière, le théorème de Banach-Tarski (voir l'encadré page 36), si difficile à accepter dans le cadre classique et qui s'éclaire dans celui des topos, nous montre une certaine limite du choix qui prévaut depuis au moins Descartes, et qui consiste à modéliser (et même à penser !) l'espace comme un ensemble de points. Postulat d'ailleurs conforté par le point de vue ensembliste en vigueur depuis Cantor et Hilbert : dans les mathématiques « modernes », tous les objets sont des ensembles !

Le cadre des topos nous permet de sortir de ce carcan, car les topos n'ont pas besoin de points pour exister : il donne au mathématicien – comme s'il avait chaussé de nouvelles lunettes – un nouvel outil d'exploration, plus fin, faisant apparaître de nouveaux objets et apportant de nouvelles réponses à d'anciennes questions. ■

De l'autre côté du miroir

entre les espaces ordinaires et les topos, le monde est plus beau

■ BIBLIOGRAPHIE

Le site du Grothendieck Circle rassemble certaines œuvres inédites du mathématicien : www.grothendieckcircle.org/

UN ÉCRIVAIN en quête de vérité

Alexandre Grothendieck a laissé bien plus qu'une œuvre mathématique monumentale : une façon d'aborder le monde sans fard ni artifices, à commencer par ceux dont on se pare soi-même pour affronter la vie.

Leila Schneps

Si Alexandre Grothendieck n'avait pas été un grand mathématicien, nous n'aurions jamais connu l'écrivain prolifique qu'il fut, en particulier à partir des années 1970. Ses œuvres écrites, éparpillées, difficiles à déchiffrer, partiellement perdues, seraient restées au fond des malles où elles ont été consignées après sa mort. Du moins celles que Grothendieck n'a pas brûlées et qu'il conservait, à partir de sa disparition en 1991 (son retrait du monde pour le village de Lasserre, en Ariège), dans d'immenses classeurs sur les rayons de sa chambre à coucher. Aujourd'hui, les traits de cette figure mystérieuse pleine d'inspiration et de violentes contradictions, qui commençaient tout juste à émerger grâce aux quelques biographies parues depuis sa mort se précisent à la lecture des trésors de Lasserre. Et si c'est grâce au mathématicien que l'on découvre les œuvres littéraires de Grothendieck, celles-ci pourraient bien rester, être lues et appréciées pour elles-mêmes. Par sa constante quête de vérité et les multiples efforts déployés pour transmettre, au fil

L'ESSENTIEL

■ **Toute sa vie, Alexandre Grothendieck a écrit, consignait ses réflexions mathématiques, mais aussi ses pensées sur lui, les hommes et la société.**

■ **L'amour, les rêves, le mal... Les thèmes qu'il a abordés au fil de ses milliers de pages sont nombreux, mais une constante demeure : la volonté de voir le monde sans déformation.**

■ **Pour l'authenticité et la constance de sa démarche, il mérite d'être lu.**

© Shutterstock.com/DVARG

du chemin, ses découvertes, Grothendieck mérite de rejoindre les monuments de la pensée française.

Toute sa vie, Grothendieck a écrit au fil de la plume, le plus souvent la nuit, une petite lampe allumée sur son bureau. Il faisait des plans détaillés, des tables des matières parfaitement organisées, et puis tout se délitait, sa plume – ou sa petite machine à écrire, dans les années 1980 – l'emportant à chaque fois vers des contrées inattendues. Il n'hésitait jamais à suivre cet appel, même si ses digressions l'emmenaient parfois fort loin du but initial. C'est pourquoi, par exemple, son manuscrit *La Clef des songes*, qui devait comporter 12 chapitres, n'en contient que 7, formant un total de quelque 350 pages, alors que les notes ajoutées constituent un ensemble impressionnant de presque 700 pages, qui peuvent d'ailleurs être lues tout à fait indépendamment. En commençant son livre dans les années 1980, Grothendieck voulait explorer son expérience du rêve, mais ses pensées l'ont entraîné sur une tout autre

voie : une réflexion sur les connexions psychologiques entre créativité et révélation.

Grothendieck lisait et relisait ce qu'il écrivait, l'annotant encore et encore. Les annotations se trouvent tantôt en marge, montrant combien il avait changé d'avis sur les questions profondes qui occupaient sa pensée (telles que l'existence de l'inspiration divine ou du libre arbitre), tantôt sous forme de petits numéros insérés dans le texte, renvoyant à de longues notes ajoutées à la fin. Les œuvres de Grothendieck ont une structure arborescente, et pas toujours d'aboutissement bien clair. Très imagé, tantôt rêveur ou même extatique, tantôt ironique – c'est là que l'on voit percer une rare pointe d'humour –, tantôt plus direct, presque pédagogique, Grothendieck a un style bien à lui, plein de tournures particulières et d'une rare originalité due à sa spontanéité. Lire Grothendieck, c'est accepter de se laisser prendre par la main pour une promenade dont on ne connaît pas le but. C'est partir à la découverte, et le voyage en vaut la peine.

Beaucoup ont dit que Grothendieck ne lisait jamais rien ou presque. C'est peut-être vrai de sa période mathématique, lorsqu'il avait entre 20 et 42 ans. Travaillant seize heures par jour, totalement concentré sur les mathématiques, il n'avait pas le temps pour autre chose, se consacrant déjà trop peu à sa famille, sans parler de loisirs sportifs ou culturels. Mais avant et après cette période, il a lu énormément. Pendant son enfance, vivant auprès de sa mère Hanka, il ne pouvait en être autrement. Femme de lettres très cultivée, journaliste professionnelle dans sa jeunesse, Hanka a notamment écrit entre 1945 et 1957 un long roman autobiographique non publié, mais extraordinaire, *Eine Frau*.

Grothendieck lui-même se remémore ses lectures au cours d'une longue méditation sur la véritable nature de l'inspiration qu'il sentait souffler en lui. « Les auteurs que j'ai aimés, ou qui m'ont impressionné à certaines époques de ma vie, dans mon enfance notamment, étaient-ils inspirés ? » se demande-t-il :

J'évoque tout d'abord Sigrid Undset, Kristin Lavransdatter et Olev Audunsson, sûrement inspirés, puis l'Olympe russe de mon enfance : Dostoïevski, Tolstoï, Gogol, Tourguénieff, Gorki, enfin Knut Hamsun (qui fut le grand parmi les grands pour Hanka), et Selma Lagerlöf (de Gösta Berling). L'impression se dégage que tous ces auteurs, à part sûrement Gorki et peut-être Selma Lagerlöf, ont été inspirés dans au moins certaines de leurs œuvres (Souvenirs de la Maison des Morts, Âmes Mortes, Victoria, Faim...).

Et dans une lettre à un ami, Grothendieck se souvient d'avoir chahuté un professeur du Collège Cévenol, au Chambon-sur-Lignon où il était hébergé pendant les dernières années de la Seconde Guerre mondiale :

Rudi et moi partagions avec lui la même langue maternelle, l'allemand, et l'arrière-fond de culture littéraire idoine (Goethe et Schiller notamment, que M. Steckler aimait à réciter avec emphase).

Rudi et moi n'en loupions pas une pour le contrefaire et le tourner en dérision, en invoquant l'autorité des « plus grands écrivains de tous les temps » (soit Goethe, soit Schiller, suivant la citation).

Si le jeune élève Grothendieck avait ses moments provocateurs, il a trempé dès son plus jeune âge dans la grande littérature, et les effets s'en ressentent dans tout ce qu'il a produit par la suite.

Une inspiration soufflée de l'extérieur

Dès le moment où il s'est mis à méditer et à noter les résultats de ses méditations – « une certaine nuit du mois d'octobre 1976 », à l'âge de 48 ans – Grothendieck s'est vu surtout en chercheur, et témoin, de vérité. L'inspiration – ses idées, le fruit d'une réflexion intense et concentrée, le plus souvent nocturne – lui semblait soufflée de l'extérieur. Ce qui lui parvenait ainsi n'était pas en soi un renseignement ou une observation, mais plutôt la capacité d'y voir clair, d'observer sans déformation, de s'affranchir de la peur ou des forces de l'ego ; et il sentait qu'il était la voie par laquelle ces vérités devaient éclater au grand jour. Selon les différentes périodes de sa vie, Grothendieck a attribué la source de cette compréhension à Dieu, aux anges ou au fait que lui-même était un mutant, et il a appliqué cette même écoute aux mathématiques, au sort de la planète, à la société ou à la psychologie humaine.