

LOGIQUE & CALCUL

Les arbres des mathématiciens sont-ils tous gracieux ?

Au détour de questions sur les graphes et leur décomposition surgit un problème qui se formule simplement et qui, cinquante ans plus tard, résiste toujours.

Jean-Paul DELAHAYE

Les mathématiciens ont leur propre conception de ce qui est beau. Ce qu'ils dénomment « graphes gracieux » ou « arbres gracieux » ne vous semblera pas aussi ravissant qu'une ballerine d'opéra interprétant *Le Lac des cygnes*... Or ces notions introduites en 1967 par le mathématicien slovaque Alexander Rosa désignent une catégorie de structures combinatoires dotées de propriétés délicates et rares. Leur attrait esthétique n'est ressenti que si l'on sait que l'ajustement nécessaire à leur construction est difficile et improbable.

Un graphe de n arcs (ou arêtes) est dit gracieux si l'on peut numérotiser ses nœuds par des entiers différents pris entre 0 et n de façon que les arcs soient numérotés par tous les entiers de 1 à n quand on associe à chaque arc la valeur absolue de la différence des numéros de ses extrémités.

La définition est un peu raide ! Procédons plus lentement :

a) Un « graphe numéroté » est un graphe auquel on a associé un entier positif ou nul à chaque nœud.

b) La « valeur » d'un arc d'un graphe numéroté est la valeur absolue de la différence des numéros de ses extrémités.

c) Un graphe de n arcs est « gracieux » si l'on peut numérotiser ses nœuds par certains des entiers pris entre 0 et n , de façon que les valeurs des arcs soient tous les entiers de 1 à n . Le graphe *a* dans l'encadré page ci-contre est un exemple de graphe gracieux.

Les graphes que nous considérerons ici sont non orientés (l'arc AB est identique à l'arc BA), connexes (d'un seul tenant), sans boucle (pas d'arc liant un nœud à lui-même) et sans arc multiple (un arc, au plus, relie deux nœuds différents).

Placer des entiers aux nœuds d'un graphe donné pour établir qu'il est gracieux est un jeu : il faut tâtonner, vérifier, recommencer, etc. La difficulté est qu'on a la certitude d'avoir réussi seulement lorsque tous les nœuds sont numérotés, et qu'il est souvent impossible de concevoir des méthodes progressives de numérotation des nœuds. Essayez avec les cinq graphes *b, c, d, e, f* de la page ci-contre en tentant d'identifier le seul graphe de cette série qui n'est pas gracieux (*solutions sur le site de Pour la Science : <http://bit.ly/pls467-delahaye>*).

Des familles de graphes

On remarquera que si l'on a une numérotation des nœuds qui rend gracieux un graphe de n arcs, alors, en remplaçant chaque numéro a d'un nœud par $n-a$, on obtient une autre numérotation satisfaisante. En effet, d'une part, si a est compris entre 0 et n , c'est aussi le cas pour $n-a$. D'autre part, l'égalité $|(n-a) - (n-b)| = |a-b|$ est évidente, et donc les arcs seront numérotés de la même façon avec la nouvelle numérotation des nœuds : par tous les entiers entre 1 et n .

Le jeu devient un problème mathématique quand on introduit des classes de graphes.

Considérons par exemple la classe la plus simple de graphes, les « graphes linéaires », constitués de n nœuds $a_1, a_2, \dots, a_n$ reliés le plus simplement possible par des arcs $a_1-a_2, a_2-a_3, \dots, a_{n-1}-a_n$.

On découvre sans peine que tous sont gracieux en numérotant de gauche à droite un nœud sur deux par les entiers 0, 1, 2, ... puis, arrivé au bout, en repartant de droite à gauche pour numérotiser les nœuds oubliés lors du premier passage (*graphe h ci-contre*).

Cette numérotation régulière qui rend le graphe linéaire gracieux n'est pas la seule : il existe un grand nombre de telles numérotations. Les chercheurs ont établi en 2003 que ce nombre est supérieur à $(5/3)^n$ pour le graphe linéaire à n nœuds. Ce résultat a été amélioré, à l'aide d'un ordinateur, par le mathématicien polonais Michał Adamaszek, lequel a montré que le nombre de numérotations possibles est supérieur à $(2,37)^n$.

Une autre classe infinie de graphes gracieux facile à découvrir est celle des graphes en étoile (*graphe g ci-contre*). Le nœud au centre, numéroté 0, est relié à n autres nœuds numérotés 1, 2, ..., n ; bien évidemment, cela produit la numérotation attendue 1, 2, ..., n des arcs. Il n'y a qu'une seule numérotation, les autres s'y ramenant par permutation des branches de l'étoile.

Depuis qu'on s'intéresse à cette propriété des graphes, une multitude de classes de graphes ont été prouvées gracieuses. Citons-en quelques-unes.

Neuf exemples de graphes gracieux et un intrus

Ci-dessous figure un exemple de graphe gracieux doté de 8 arcs (a). Pour prouver que ce graphe est gracieux, on numérote ses nœuds par des entiers pris entre 0 et 8, de telle façon qu'en associant à chaque arc l'entier correspondant à la différence entre les numéros de ses extrémités, on obtienne tous les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On vérifie aisément que la numérotation indiquée convient.

Numérotez les nœuds d'un graphe pour prouver qu'il est gracieux ressemble un peu à un jeu de sudoku. C'est possible pour 4 des 5 graphes b, c, d, e, f ci-dessous. Trouvez comment, et repérez le seul graphe disgracieux (les solutions sont sur <http://bit.ly/pls467-delahaye>).

Tous les graphes en étoile (g) ou linéaires (h) sont gracieux. Les procédés utilisés pour les deux exemples se généralisent. En i et j sont montrés deux graphes gracieux (chenille et hypercube) avec les numérotations qui prouvent leur gracieusité.

