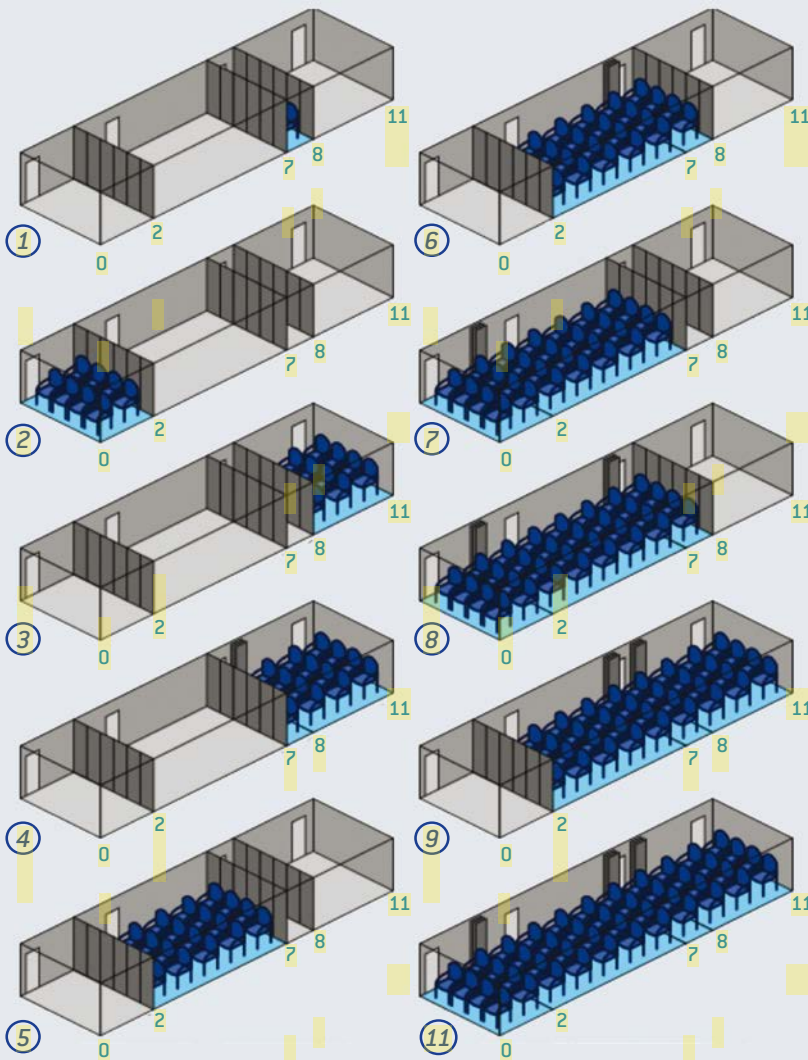
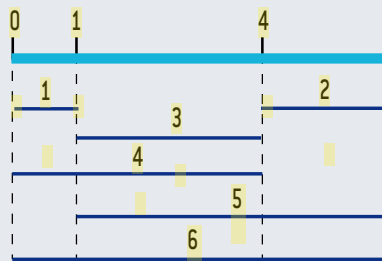


Les règles de Golomb

La règle considérée par Solomon Golomb ne comporte que 4 graduations et permet cependant de mesurer les longueurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 (voir le schéma ci-dessous). Il n'existe pas de règles équivalentes comportant 5 graduations et permettant de mesurer toutes les longueurs entières de 1 à 10.

Les règles « optimales » de Golomb sont celles qui, pour un entier n donné, sont les plus courtes et telles que les distances entre deux marques sont toutes différentes. Elles sont utiles dans diverses applications. Par exemple, avec seulement 3 murs escamotables, une salle de spectacle est modulable en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 11 rangées de fauteuils (nombres entourés, ci-dessous).



https://en.wikipedia.org/wiki/Golomb_ruler

sant au hasard un graphe ayant un grand nombre de nœuds, il est donc très probable qu'il soit disgracieux. Assez curieusement, Erdős n'a pas publié sa démonstration, bien qu'il fût pourtant très attaché à la publication de ses résultats (il a signé ou cosigné plus de 1 500 articles de mathématiques). D'autres l'ont refaite un peu plus tard.

La conjecture des arbres gracieux est importante non seulement parce qu'il est rageant d'être face à un énoncé aussi simple qui résiste, mais également parce que sa démonstration conduirait à prouver une autre jolie conjecture, qui attend elle aussi depuis cinquante ans.

Alexander Rosa a démontré que si A est un arbre gracieux quelconque à n nœuds, alors le graphe complet K_{2n-1} ($2n-1$ nœuds dont chacun est lié à tous les autres) se décompose en $2n-1$ copies de A (voir l'encadré page 81).

La conjecture « Pour tout arbre A à n nœuds, le graphe complet K_{2n-1} se décompose en $2n-1$ copies de A », dénommée conjecture de Ringel, serait donc prouvée si l'on démontrait la conjecture de Ringel-Kotzig-Rosa affirmant que tout arbre est gracieux. Ce n'est pour l'instant pas le cas.

Notons que si la conjecture de Ringel-Kotzig-Rosa entraîne la conjecture de décomposition, l'inverse n'est pas vrai : certains arbres A à n nœuds pourraient ne pas être gracieux bien que K_{2n-1} se décompose en copies de A .

On imagine mal à quel point le travail des mathématiciens confrontés à des problèmes de ce type est intense, déterminé et consciencieux. Dans le cas des conjectures qui nous intéressent, la possibilité d'obtenir des résultats partiels (par exemple en établissant qu'une certaine classe de graphes est gracieuse ou non) a conduit à une multiplication des travaux. Plus de 2 000 articles de recherche sur le sujet des numérotations et décompositions de graphes ont été publiés depuis celui d'Alexander Rosa paru en 1967.

Un résumé des résultats est régulièrement mis à jour. Ce document recense les références des publications et énonce sans démonstration les résultats principaux du domaine. La dernière version de ce résumé, proposée par l'Américain Joseph Gallian

en 2015, s'étend sur 389 pages et donne les références de 2012 articles !

Poursuivons nos questions à propos des graphes complets à n nœuds, notés K_n . Le nombre d'arcs du graphe K_n est égal à $n(n-1)/2$: chaque nœud est lié à $n-1$ autres (rappelons qu'on interdit les arcs liant un nœud à lui-même), ce qui fait un total de $n(n-1)$ liens, qu'il faut diviser par 2 puisque l'arc AB est considéré identique à l'arc BA. On démontre que K_n n'est gracieux que si $n = 1, 2, 3$ ou 4.

Les graphes complets et les règles de Golomb

C'est bien dommage, car cela aurait permis de fabriquer d'élégantes règles de mesure comportant peu de graduations. Considérons par exemple la numérotation qui rend gracieux le graphe K_4 . Ses nœuds sont numérotés 0, 1, 4, 6. Les arcs, eux, sont numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6. En plaçant les nœuds sur une règle et les disposant de façon que les nœuds soient à distance 0, 1, 4 et 6 d'un repère initial, on obtient une règle n'ayant que 4 graduations et qui peut toutefois mesurer les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6 (voir l'encadré page ci-contre).

Si le graphe K_5 , qui comporte 10 arcs, avait été gracieux, on aurait pu construire une règle à 5 graduations permettant de mesurer les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Une telle règle n'existe pas. On peut chercher à s'en approcher en essayant de placer n marques sur une règle en des positions entières, de telle façon que les distances entre deux marques soient toujours différentes. Bien sûr, le système de n marques conduisant à la règle la plus courte (celle dont les deux graduations extrêmes sont les plus rapprochées) donne la règle la plus intéressante. C'est ce qu'on dénomme la « règle optimale de Golomb d'ordre n ». Elle porte le nom du mathématicien américain Solomon Golomb, qui s'est intéressé à tous ces problèmes et à bien d'autres, et qui est décédé tout récemment, le 1^{er} mai 2016.

Pour 5 marques, il y a en fait deux graduations optimales : celle où on place les marques en 0, 1, 4, 9, 11 et celle où elles sont en 0, 2, 7, 8, 11. On peut grâce à elle

fabriquer une règle à 5 graduations qui mesure toutes les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 (il manque 10). Cela permet alors de concevoir une salle de réunion ayant trois murs escamotables et qui pourra recevoir $k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, 7k, 8k, 9k$ ou $11k$ personnes selon les murs utilisés, où k est le nombre de chaises de chaque rangée (voir l'encadré page ci-contre).

La recherche des règles optimales de Golomb est particulièrement difficile et de nombreuses heures d'ordinateur y ont été consacrées. Des tableaux de records sont établis. Démontrer que les règles figurant dans ces tableaux de records ne peuvent être améliorées exige un travail supplémentaire, qui n'a pas pu être mené très loin faute d'une théorie puissante de ces structures combinatoires.

Aujourd'hui, on connaît avec certitude les règles optimales de Golomb pour 1 à 27 graduations. Leur longueur est donnée en bleu, entre parenthèses :

1 [0], 2 [1], 3 [3], 4 [6], 5 [11], 6 [17], 7 [25], 8 [34], 9 [44], 10 [55], 11 [72], 12 [85], 13 [106], 14 [127], 15 [151], 16 [177], 17 [199], 18 [216], 19 [246], 20 [283], 21 [333], 22 [356], 23 [372], 24 [425], 25 [480], 26 [492], 27 [553].

Le dernier progrès est daté du 19 février 2014. Il a permis de prouver que pour 27 graduations, les positions suivantes donnent la règle optimale : 0-3-15-41-66-95-97-106-142-152-220-221-225-242-295-330-338-354-382-388-402-415-486-504-523-546-553.

La théorie des graphes, dont l'essentiel des développements a moins d'un siècle, rencontre comme l'arithmétique d'étranges problèmes aux énoncés simples dont les démonstrations sont soit très longues, comme le « Théorème des mineurs » (voir cette rubrique dans *Pour la Science* d'avril 2008), soit introuvables, comme les deux conjectures que nous venons d'évoquer. Pourquoi ? C'est assez mystérieux, mais cela montre que les formalismes que nous utilisons (des axiomes et des règles pour les manipuler) et qui nous semblent puissants et généraux, sont en réalité faibles et n'accèdent efficacement qu'à la surface du monde mathématique.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

Wikipédia, Règles de Golomb (consulté en mai 2016) : https://fr.wikipedia.org/wiki/Règle_de_Golomb

D. Anick, Counting graceful labelings of trees : A theoretical and empirical study, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 198, pp. 65-81, 2016.

J. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, 2015 : www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS6/pdf

M. M. Al Aziz et al., Graceful labeling of trees : Methods and applications, 17th International Conference on Computer and Information Technology (ICIT), 2014 (<http://bit.ly/2a8ewoG>).

K. Drakakis, A review of the available construction methods for Golomb rulers, *Advances in Mathematics of Communications*, vol. 3(3), pp. 235-250, 2009.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr