

en 2015, s'étend sur 389 pages et donne les références de 2012 articles !

Poursuivons nos questions à propos des graphes complets à n nœuds, notés K_n . Le nombre d'arcs du graphe K_n est égal à $n(n-1)/2$: chaque nœud est lié à $n-1$ autres (rappelons qu'on interdit les arcs liant un nœud à lui-même), ce qui fait un total de $n(n-1)$ liens, qu'il faut diviser par 2 puisque l'arc AB est considéré identique à l'arc BA. On démontre que K_n n'est gracieux que si $n = 1, 2, 3$ ou 4.

Les graphes complets et les règles de Golomb

C'est bien dommage, car cela aurait permis de fabriquer d'élégantes règles de mesure comportant peu de graduations. Considérons par exemple la numérotation qui rend gracieux le graphe K_4 . Ses nœuds sont numérotés 0, 1, 4, 6. Les arcs, eux, sont numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6. En plaçant les nœuds sur une règle et les disposant de façon que les nœuds soient à distance 0, 1, 4 et 6 d'un repère initial, on obtient une règle n'ayant que 4 graduations et qui peut toutefois mesurer les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6 (voir l'encadré page ci-contre).

Si le graphe K_5 , qui comporte 10 arcs, avait été gracieux, on aurait pu construire une règle à 5 graduations permettant de mesurer les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Une telle règle n'existe pas. On peut chercher à s'en approcher en essayant de placer n marques sur une règle en des positions entières, de telle façon que les distances entre deux marques soient toujours différentes. Bien sûr, le système de n marques conduisant à la règle la plus courte (celle dont les deux graduations extrêmes sont les plus rapprochées) donne la règle la plus intéressante. C'est ce qu'on dénomme la « règle optimale de Golomb d'ordre n ». Elle porte le nom du mathématicien américain Solomon Golomb, qui s'est intéressé à tous ces problèmes et à bien d'autres, et qui est décédé tout récemment, le 1^{er} mai 2016.

Pour 5 marques, il y a en fait deux graduations optimales : celle où on place les marques en 0, 1, 4, 9, 11 et celle où elles sont en 0, 2, 7, 8, 11. On peut grâce à elle

fabriquer une règle à 5 graduations qui mesure toutes les distances 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 (il manque 10). Cela permet alors de concevoir une salle de réunion ayant trois murs escamotables et qui pourra recevoir $k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, 7k, 8k, 9k$ ou $11k$ personnes selon les murs utilisés, où k est le nombre de chaises de chaque rangée (voir l'encadré page ci-contre).

La recherche des règles optimales de Golomb est particulièrement difficile et de nombreuses heures d'ordinateur y ont été consacrées. Des tableaux de records sont établis. Démontrer que les règles figurant dans ces tableaux de records ne peuvent être améliorées exige un travail supplémentaire, qui n'a pas pu être mené très loin faute d'une théorie puissante de ces structures combinatoires.

Aujourd'hui, on connaît avec certitude les règles optimales de Golomb pour 1 à 27 graduations. Leur longueur est donnée en bleu, entre parenthèses :

1 [0], 2 [1], 3 [3], 4 [6], 5 [11], 6 [17], 7 [25], 8 [34], 9 [44], 10 [55], 11 [72], 12 [85], 13 [106], 14 [127], 15 [151], 16 [177], 17 [199], 18 [216], 19 [246], 20 [283], 21 [333], 22 [356], 23 [372], 24 [425], 25 [480], 26 [492], 27 [553].

Le dernier progrès est daté du 19 février 2014. Il a permis de prouver que pour 27 graduations, les positions suivantes donnent la règle optimale :

0-3-15-41-66-95-97-106-142-152-220-221-225-242-295-330-338-354-382-388-402-415-486-504-523-546-553.

La théorie des graphes, dont l'essentiel des développements a moins d'un siècle, rencontre comme l'arithmétique d'étranges problèmes aux énoncés simples dont les démonstrations sont soit très longues, comme le « Théorème des mineurs » (voir cette rubrique dans *Pour la Science* d'avril 2008), soit introuvables, comme les deux conjectures que nous venons d'évoquer. Pourquoi ? C'est assez mystérieux, mais cela montre que les formalismes que nous utilisons (des axiomes et des règles pour les manipuler) et qui nous semblent puissants et généraux, sont en réalité faibles et n'accèdent efficacement qu'à la surface du monde mathématique.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

BIBLIOGRAPHIE

Wikipédia, Règles de Golomb (consulté en mai 2016) : https://fr.wikipedia.org/wiki/Règle_de_Golomb

D. Anick, Counting graceful labelings of trees : A theoretical and empirical study, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 198, pp. 65-81, 2016.

J. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, 2015 : www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS6/pdf

M. M. Al Aziz et al., Graceful labeling of trees : Methods and applications, 17th International Conference on Computer and Information Technology (ICCIIT), 2014 (<http://bit.ly/2a8ewoG>).

K. Drakakis, A review of the available construction methods for Golomb rulers, *Advances in Mathematics of Communications*, vol. 3[3], pp. 235-250, 2009.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

L'imaginaire à la carte

Les cartes de mondes fictifs rivalisent parfois de réalisme avec celles de régions terrestres bien réelles. Elles fourmillent de détails et racontent, à leur façon, une part de l'histoire de leur univers.

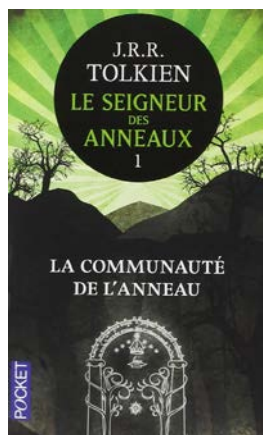
Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Illustration : Marc BOULAY

Dans la version française de l'encyclopédie Wikipédia, la description géographique du continent de Westeros est plus longue et détaillée (plus de 6 000 mots) que celle du Danemark (3 724 mots seulement), où vivent également des monarques ou des princesses. La différence est que Westeros est un lieu imaginaire tiré des romans de George R. R. Martin, adaptés à la télévision avec la série *Game of Thrones*. La carte de ce monde, minutieusement décrite dans le générique de chaque épisode, plante le décor où se déroule l'action et renforce la crédibilité de cette fiction. C'est un procédé classique dans les histoires médiévales-fantastiques : déjà en 1937, dans son premier roman *Bilbo le Hobbit*, John R. R. Tolkien avait lui-même dessiné la carte de la Terre du Milieu. Ce continent devenu mythique est aussi le siège de l'action du *Seigneur des Anneaux* (1954-1955).

Les cartes, ces « outils géographiques par excellence », pour reprendre l'expression du géographe Jean-Benoît Bouron, définissent des lieux, qu'ils soient réels ou imaginaires. Outre les informations souvent multiples qu'elles délivrent – topographiques mais aussi climatiques, écologiques, géologiques, géopolitiques, etc. – les cartes racontent leurs propres histoires.

En 1992, William Sarjeant, professeur de géologie à l'université du Saskatchewan, au Canada, s'est appuyé sur la carte et les écrits de Tolkien pour reconstruire l'histoire géolo-



JOHN R. R. TOLKIEN a lui-même dessiné la carte du monde où évoluent les personnages du *Seigneur des Anneaux* et de *Bilbo le Hobbit*. Cette carte, avec ses nombreux détails, rappelle celles dressées par les grands explorateurs du XV^e et du XVI^e siècles.

gique de la Terre du Milieu ! Avec ses monstres et ses sirènes soigneusement dessinés dans les mers, sa rose des vents très élaborée ainsi que son style graphique tiré des mappemondes des siècles des grandes découvertes, cette carte témoigne des inspirations tantôt médiévale, tantôt art nouveau ou même folklorique de l'auteur, qui était professeur de philologie à l'université de Leeds. Les toponymes utilisés – tel The Shire (le Comté, où vivent les Hobbits) – trahissent aussi l'affiliation britannique de Tolkien (les mêmes Hobbits sont d'ailleurs souvent vus comme des caricatures de la bourgeoisie anglaise).

La carte de l'île mystérieuse du roman éponyme de Jules Verne (1875) présente des toponymes très évocateurs : promontoire du Reptile, golfe du Requin, caverne des Jaguars. Les figurés sont conventionnels pour l'époque : les reliefs y sont symbolisés par des tirets (dont la densité est proportionnelle à la pente), des ondes de vagues s'étirent le long des côtes, les plages et les dunes sont représentées par des pointillés et les forêts par des figurés moutonneux. Cette représentation imaginaire semble directement inspirée de la carte des îles Auckland, un archipel bien réel situé au sud de la Nouvelle-Zélande, et dont l'exploration des terres désolées n'était pas inconnue de Jules Verne.

Mais alors comment démêler le vrai du faux ? Il n'est parfois pas évident de reconnaître une géographie imaginaire : leurs auteurs prennent soin d'utiliser des codes graphiques bien adaptés pour brouiller les



LA CARTE D'UN MONDE IMAGINAIRE
regorge de détails qui rendent crédibles cet univers, sa géographie, son climat, sa géologie et l'histoire de ses habitants.

pistes. On pourrait dire que les cartes fictives présentent souvent des *terrae incognitae*, c'est-à-dire des zones blanches laissées vierges pour permettre à la trame de se dérouler, aux personnages d'évoluer, ou tout simplement à l'imaginaire de se mettre en branle. Mais n'est-ce pas aussi le cas de nos cartes bien réelles ? Même à l'heure des satellites qui quadrillent notre planète, la carte géologique de l'Antarctique, par exemple, présente encore des zones inconnues, les géologues ne pouvant se rendre sur place pour vérifier leurs hypothèses (la glace empêche tout échantillonnage rocheux). Il en est de même avec la carte des fonds marins, dont 75 % des zones très profondes demeurent inexplorées.

Explorées, les *terrae incognitae* reculent petit à petit et les cartes s'enrichissent. La cartographie n'est donc pas un domaine figé, mais en perpétuelle évolution. D'ailleurs, les premières mises en forme scientifiques de données cartographiques remontent à Ptolémée (II^e siècle). C'est lui qui, le premier, a formulé des principes de projection : « Il serait bon de conserver droites les lignes qui représentent les méridiens et de représenter les parallèles de latitude par des arcs de cercle dessinés autour d'un même centre. »

Si les cartes forment d'excellents supports pour illustrer et décrire les mondes fictifs en littérature, elles sont aussi utilisées en bande dessinée et au cinéma. La carte du monde d'Aldébaran, dessinée par Leo, permet de suivre les aventures de colons

humains fraîchement débarqués sur cette planète imaginaire. Dans *Star Wars*, les plans de l'Étoile Noire (*Épisode III*) et la carte menant à Luke Skywalker (*Épisode VII*) sont même au cœur de l'action !

Des villes-planètes aux défis de l'urbanisation

Le géographe Alain Musset s'est penché, toujours dans le monde de *Star Wars*, sur la cartographie de Coruscant, une ville couvrant toute une planète. Il note que cette cité démesurée et remplie de gratte-ciel présente une structure verticale où les classes sociales sont marquées par des inégalités vertigineuses. Selon lui, ce schéma, très classique, des œuvres dépeignant des mégapoles hypermodernes (très présentes dans le genre cyberpunk notamment), résulterait d'inquiétudes bien réelles liées à l'urbanisation galopante – et ses problèmes sociaux inhérents – de certaines régions du monde (rappelons que 54 % de la population mondiale est aujourd'hui concentrée dans des zones urbaines).

Simple illustration renforçant la fiction, décor vivant, ou encore lieu d'action, la carte est aussi au cœur des jeux de rôle (jeux de plateau et jeux vidéo). Ainsi, la carte de Laelith, grande cité médiévale-fantastique imaginée dans les années 1980 par l'équipe du magazine *Casus Belli*, a servi de base à de nombreux scénarios, notamment pour le jeu *Donjons & Dragons*. Notons que cette

carte intègre astucieusement des données géologiques, car la cité en question est construite en pente, sur un grand plan qu'un basculement tectonique a incliné.

La limite entre réalité et fiction est encore plus ténue lorsque des lieux bien réels deviennent espaces fictionnels. Dans *L'Appel du Cthulhu*, autre jeu issu de l'univers anxio-gène de l'écrivain Howard P. Lovecraft, certaines parties se déroulent sur une carte de Londres à l'époque victorienne. Enfin, dans *Sables rouges*, jeu de rôle de science-fiction (du genre postapocalyptique), les scénarios reposent sur une carte réelle de la planète Mars éditée par la Nasa !

Si la cartographie est une discipline relevant des sciences dites exactes car elle mesure, analyse et tente de représenter des données souvent quantitatives dans des espaces donnés, la géographie n'en demeure pas moins une science humaine qui assume pleinement sa dimension subjective.

Et si des cartes imaginaires peuvent ressembler à des mondes bien réels, l'inverse est également vrai. L'espace décrit en géographie varie suivant les projections et les points de vue : par exemple, la carte de la Terre avec la projection de Spilhaus, centrée sur le pôle Sud, fait apparaître les océans au centre du monde et nous ferait presque croire que nous vivons sur une autre planète ! ■

Jean-Sébastien STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. Roland LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay. Marc BOULAY est sculpteur numérique.