

Considérons la machine M à 2 états A et B , et dont les instructions sont $[A \ 0 \rightarrow 0 \text{ droite } A]$, $[A \ 1 \rightarrow 0 \text{ droite } A]$ et $[A \ 2 \rightarrow 0 \text{ gauche } B]$. Quand on place la tête de lecture-écriture de M au début d'un ruban comportant par exemple 0101101020010..., alors M parcourt le ruban de gauche à droite en remplaçant les 1 par des 0, puis, arrivée au 2, elle recule d'une case et s'arrête, car il n'y a aucune instruction lui indiquant ce qu'elle doit faire quand elle se trouve dans l'état B .

Si on place cette machine sur un ruban infini ne comportant que des 0 et des 1, elle le parcourt vers la droite sans jamais s'arrêter en remplaçant les 1 par des 0. La machine de Turing peut ainsi s'engager dans un calcul infini.

L'état A dans lequel on place la machine au démarrage est l'« état de départ ». Un état comme l'état B de notre exemple, auquel ne correspond aucune instruction, est l'« état d'arrêt ».

Quand on compte les états d'une machine de Turing, on convient de ne pas compter l'état d'arrêt. La machine que nous avons donnée en exemple est, selon cette convention, une machine à un état. Sauf exception, nous ne considérerons que des calculs de machines de Turing commençant sur un ruban (potentiellement infini) entièrement couvert de 0, et nous supposerons que les machines n'utilisent que les deux symboles 0 et 1.

Les machines de Turing qui calculent le plus longtemps

Pour chaque entier positif n , il existe une machine de Turing à n états record, c'est-à-dire telle qu'aucune autre machine à n états n'utilisant que les symboles 0 et 1 ne calcule plus longtemps, sauf celles qui ne s'arrêtent jamais. Le nombre de mouvements de ce calcul record est noté $s(n)$.

Les résultats connus à ce jour sont :

$s(1) = 1$; $s(2) = 6$; $s(3) = 21$ (Lin et Radó, 1965);

$s(4) = 107$ (Brady, 1975); $s(5) \geq 47\,176\,870$ (Marxen et Buntrock, 1990);

$s(6) \geq 7,4 \times 10^{36\,534}$ (Kropitz, 2010);

$s(7) > 10^{10^{10^{10^7}}}$ (Wythagoras, 2014).

Nous avons indiqué ci-dessous les programmes de quelques machines record, que l'on dénomme « castors affairés ». En écrivant un programme d'exécution sur ordinateur qui simule une machine de Turing, on vérifie facilement le nombre d'étapes (égal au nombre de déplacements de la tête de lecture-écriture de la machine de Turing).

Le castor affairé à 2 états s'arrête en 6 étapes après avoir écrit quatre « 1 ». Son programme :

$[A \ 0 \rightarrow 1 \text{ droite } B]$,
 $[A \ 1 \rightarrow 1 \text{ gauche } B]$,
 $[B \ 0 \rightarrow 1 \text{ gauche } A]$,
 $[B \ 1 \rightarrow 1 \text{ droite } ARRÊT]$.

Le castor affairé à 3 états s'arrête en 21 étapes après avoir écrit cinq « 1 ». Son programme :

$[A \ 0 \rightarrow 1 \text{ droite } B]$,
 $[A \ 1 \rightarrow 1 \text{ droite } ARRÊT]$,
 $[B \ 0 \rightarrow 1 \text{ gauche } B]$,
 $[B \ 1 \rightarrow 0 \text{ droite } C]$,
 $[C \ 0 \rightarrow 1 \text{ gauche } C]$,
 $[C \ 1 \rightarrow 1 \text{ gauche } A]$.

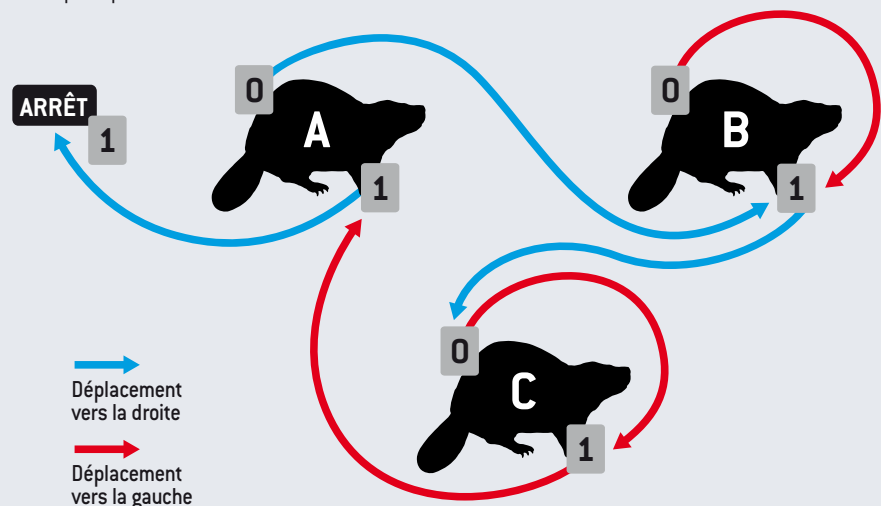
Le castor affairé à 4 états s'arrête en 107 étapes après avoir écrit treize « 1 ». Son programme :

$[A \ 0 \rightarrow 1 \text{ droite } B]$,
 $[A \ 1 \rightarrow 1 \text{ gauche } B]$,

$[B \ 0 \rightarrow 1 \text{ gauche } A]$, $[B \ 1 \rightarrow 0 \text{ gauche } C]$, $[C \ 0 \rightarrow 1 \text{ droite } ARRÊT]$,
 $[C \ 1 \rightarrow 1 \text{ gauche } D]$, $[D \ 0 \rightarrow 1 \text{ droite } D]$, $[D \ 1 \rightarrow 0 \text{ droite } A]$.

Le castor affairé à 5 états, record actuel, s'arrête en 47 176 870 étapes après avoir écrit 4 098 « 1 ». Son programme :
 $[A \ 0 \rightarrow 1 \text{ gauche } B]$, $[A \ 1 \rightarrow 1 \text{ droite } C]$, $[B \ 0 \rightarrow 1 \text{ gauche } C]$,
 $[B \ 1 \rightarrow 1 \text{ gauche } B]$, $[C \ 0 \rightarrow 1 \text{ gauche } D]$, $[C \ 1 \rightarrow 0 \text{ droite } E]$,
 $[D \ 0 \rightarrow 1 \text{ droite } A]$, $[D \ 1 \rightarrow 1 \text{ droite } D]$, $[E \ 0 \rightarrow 1 \text{ gauche } ARRÊT]$,
 $[E \ 1 \rightarrow 0 \text{ droite } A]$.

En mai et juin 2016, une série de travaux ont conduit à la conclusion que le nombre $s(1919)$ était indécidable dans la théorie des ensembles. Cela signifie qu'aucun raisonnement mené dans cette théorie ne permet de démontrer la formule $s(1919) = k$ avec la bonne valeur de k , laquelle est pourtant parfaitement et clairement définie.



REPRÉSENTATION GRAPHIQUE de l'algorithme du castor affairé à 3 états.