

LOGIQUE & CALCUL

Formes et ensembles autopavables

Un miracle géométrique : avec des copies de chaque forme d'un ensemble autopavable, on reconstitue chacune des formes en plus grand.

Jean-Paul DELAHAYE

En mai 1963, Martin Gardner présentait dans le magazine *Scientific American* les figures autopavables (*rep-tiles* en anglais) : des formes géométriques F qui se découpent en plusieurs morceaux, chacun identique à F en plus petit ; ou, ce qui revient au même, des formes géométriques qui, quand on en assemble plusieurs copies, reconstituent la forme initiale en plus grand (voir l'encadré page ci-contre).

Une question a intéressé les amateurs de géométrie combinatoire : quels polyominoes (des réunions de carrés de même taille collés côté contre côté) sont de telles figures autopavables ? Pour prouver qu'un polyomino est autopavable, il suffit de réussir à paver un rectangle avec le polyomino. En effet, si on pave un rectangle, on pave aussi un carré car les longueurs des côtés du rectangle sont des multiples entiers de la longueur du carré de base (la longueur du côté du plus petit carré faisable ainsi avec un rectangle de côtés a et b est le plus petit commun multiple de a et b), et donc on reconstitue avec plusieurs de ces carrés le polyomino lui-même en plus grand.

Quelques exemples tirés du merveilleux livre *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems and Packings* de Solomon Golomb (voir la bibliographie) sont indiqués dans l'encadré page 78. Le dernier d'entre eux utilise 50 exemplaires du polyomino pour remplir le rectangle ; il a été découvert

en 1990 par William Marshall, de Dunedin en Nouvelle-Zélande.

Le plus petit entier n tel que n copies du polyomino donnent un rectangle est l'« ordre » du polyomino. L'encadré page 79 indique la liste complète des polyominoes avec leur ordre quand le polyomino est composé de 3, 4, 5 ou 6 carrés (on trouvera une liste plus complète avec les rectangles pavés sur <http://www2.stetson.edu/~efriedma/order/>).

Chaque élément du tableau de cet encadré est un petit puzzle : lorsque le n indiqué à côté du polyomino est petit, trouver le pavage du rectangle est aisé ; le puzzle est facile. Lorsque n est grand, le puzzle devient difficile. Nous avons donné la solution extraordinaire, découverte par Tom Marlow en 1985, pour le dernier polyomino représenté, car la disposition des 92 pièces composant un rectangle est quasiment impossible à trouver à la main.

Généralisation des formes autopavables

Lee Sallows, dont nous avons déjà présenté les carrés géomagiques (« Les carrés magiques géométriques », *Pour la Science* de juin 2013) est un ingénieur informaticien britannique. Il a conçu une généralisation des formes autopavables et a mené sur ce sujet de mathématiques récréatives une double étude publiée en 2012 et 2014. Il a d'une part utilisé la force brute de l'ordinateur

pour découvrir des exemples remarquables de formes satisfaisant sa délicate définition ; d'autre part, il a conçu une méthode mathématique produisant des constructions que l'ordinateur était incapable de lui fournir.

Lee Sallows définit les « ensembles autopavables » (en anglais *self-tiling tile sets* qui donne l'abrégié *setiset*) comme des ensembles E de plusieurs formes planaires F tels que chaque forme F de l'ensemble E s'obtient en plus grand par un assemblage n'utilisant chaque forme de E qu'une fois exactement (pour un exemple, voir l'encadré page 80, en haut).

En fait, la définition que donne Lee Sallows avait déjà été envisagée, sans la nommer, par le mathématicien écossais Charles Dudley Langford dans les années 1950. Ce dernier avait cherché, sans en trouver, de telles combinaisons géométriques. Dans sa rubrique de *Scientific American*, Martin Gardner avait soumis la question à ses lecteurs. Dans son livre *Mathematical Magic Show* publié en 1977, Gardner indique trois solutions.

Lee Sallows exige dans sa définition que le rapport de taille des formes en petit et des formes en grand obtenues par composition soit le même pour chaque forme de l'ensemble autopavable. Il s'ensuit que toutes les formes d'un ensemble autopavable ont la même aire.

La définition n'impose pas aux formes d'un ensemble autopavable E d'être toutes différentes. Lorsqu'elles sont identiques, on

retombe sur la définition des formes autopavables ; lorsqu'elles sont différentes, on parle d'ensemble autopavable régulier. Les exemples proposés sont tous réguliers. Lorsque les côtés des formes sont des multiples entiers d'une même longueur (c'est le cas des polyominos) et qu'il y a n formes dans l'ensemble autopavable E , l'aire des grandes formes est n fois celle des petites ; par conséquent, le facteur d'agrandissement entre les petites et les grandes formes, qui est $\sqrt{n}$, doit être un entier. Il en résulte qu'il existe des ensembles autopavables composés de n formes seulement si n est un nombre carré tel que 4, 9, 16, etc.

Comme les formes autopavables, les ensembles autopavables engendrent des pavages complets du plan. Pour ce faire, on part d'une des formes de l'ensemble, dont les éléments seront dits de niveau 0. On l'entoure par d'autres formes de niveau 0 pour obtenir une forme plus grande, dite de niveau 1. On entoure celle-ci par d'autres de niveau 1 pour en obtenir une plus grande encore, dite de niveau 2 ; ces formes de niveau 1 se découpent en formes de niveau 0 et donc tout se ramène à un pavage d'une plus grande surface par des pièces de niveau 0. Puis on recommence et, petit à petit, on recouvre ainsi des parties de plus en plus grandes du plan par un pavage n'utilisant que des formes de niveau 0. À l'infini, on a recouvert le plan uniquement par des formes de niveau 0. Les pavages obtenus ainsi sont le plus souvent non périodiques, mais les mêmes formes pavent aussi périodiquement le plan lorsqu'on s'y prend autrement.

Trouvailles de l'ordinateur

Lee Sallows a mené une série de recherches systématiques par ordinateur pour trouver des ensembles autopavables. Il s'est concentré sur les polyominos en n'envisageant que des polyominos de taille raisonnable (6, 7 ou 8 carrés) et en ne recherchant que des ensembles autopavables de 4 polyominos. Si l'on envisage des recherches au-delà de ces limites, on est confronté à une explosion combinatoire qu'on ne pourrait éventuellement maîtriser qu'avec de gros moyens informatiques.

Formes autopavables

En prenant plusieurs copies d'une forme autopavable, on la reconstitue en plus grand, ou, ce qui revient au même : une forme autopavable se découpe en plusieurs morceaux identiques à elle-même et plus petits.

Les exemples donnés sont des formes autopavables par 4 copies (en haut) et des formes autopavables par 9 copies (en bas). On voit que certaines de ces formes sont autopavables de plusieurs façons différentes. (La symétrie miroir est autorisée.)

