

retombe sur la définition des formes autopavables ; lorsqu'elles sont différentes, on parle d'ensemble autopavable régulier. Les exemples proposés sont tous réguliers. Lorsque les côtés des formes sont des multiples entiers d'une même longueur (c'est le cas des polyominos) et qu'il y a n formes dans l'ensemble autopavable E , l'aire des grandes formes est n fois celle des petites ; par conséquent, le facteur d'agrandissement entre les petites et les grandes formes, qui est $\sqrt{n}$, doit être un entier. Il en résulte qu'il existe des ensembles autopavables composés de n formes seulement si n est un nombre carré tel que 4, 9, 16, etc.

Comme les formes autopavables, les ensembles autopavables engendrent des pavages complets du plan. Pour ce faire, on part d'une des formes de l'ensemble, dont les éléments seront dits de niveau 0. On l'entoure par d'autres formes de niveau 0 pour obtenir une forme plus grande, dite de niveau 1. On entoure celle-ci par d'autres de niveau 1 pour en obtenir une plus grande encore, dite de niveau 2 ; ces formes de niveau 1 se découpent en formes de niveau 0 et donc tout se ramène à un pavage d'une plus grande surface par des pièces de niveau 0. Puis on recommence et, petit à petit, on recouvre ainsi des parties de plus en plus grandes du plan par un pavage n'utilisant que des formes de niveau 0. À l'infini, on a recouvert le plan uniquement par des formes de niveau 0. Les pavages obtenus ainsi sont le plus souvent non périodiques, mais les mêmes formes peuvent aussi périodiquement le plan lorsqu'on s'y prend autrement.

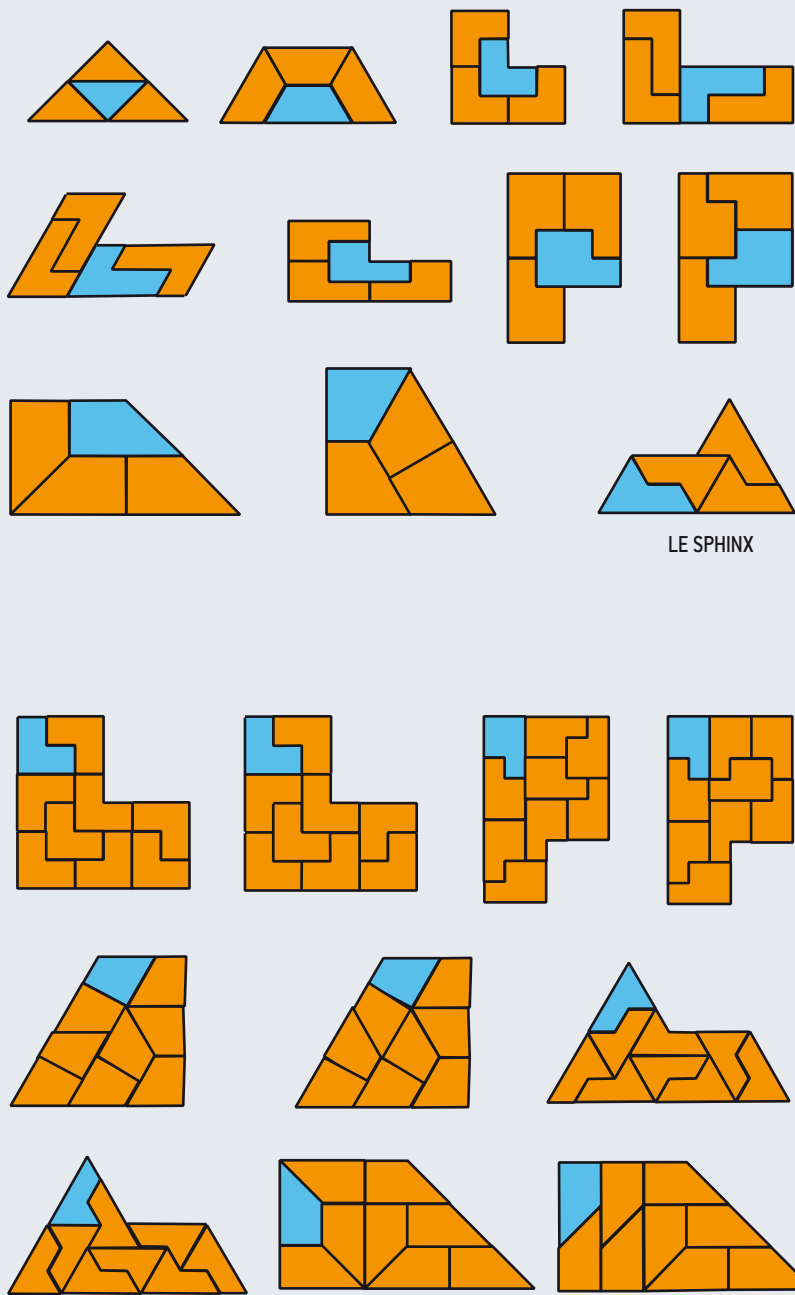
Trouvailles de l'ordinateur

Lee Sallows a mené une série de recherches systématiques par ordinateur pour trouver des ensembles autopavables. Il s'est concentré sur les polyominos en n'envisageant que des polyominos de taille raisonnable (6, 7 ou 8 carrés) et en ne recherchant que des ensembles autopavables de 4 polyominos. Si l'on envisage des recherches au-delà de ces limites, on est confronté à une explosion combinatoire qu'on ne pourrait éventuellement maîtriser qu'avec de gros moyens informatiques.

Formes autopavables

En prenant plusieurs copies d'une forme autopavable, on la reconstitue en plus grand, ou, ce qui revient au même : une forme autopavable se découpe en plusieurs morceaux identiques à elle-même et plus petits.

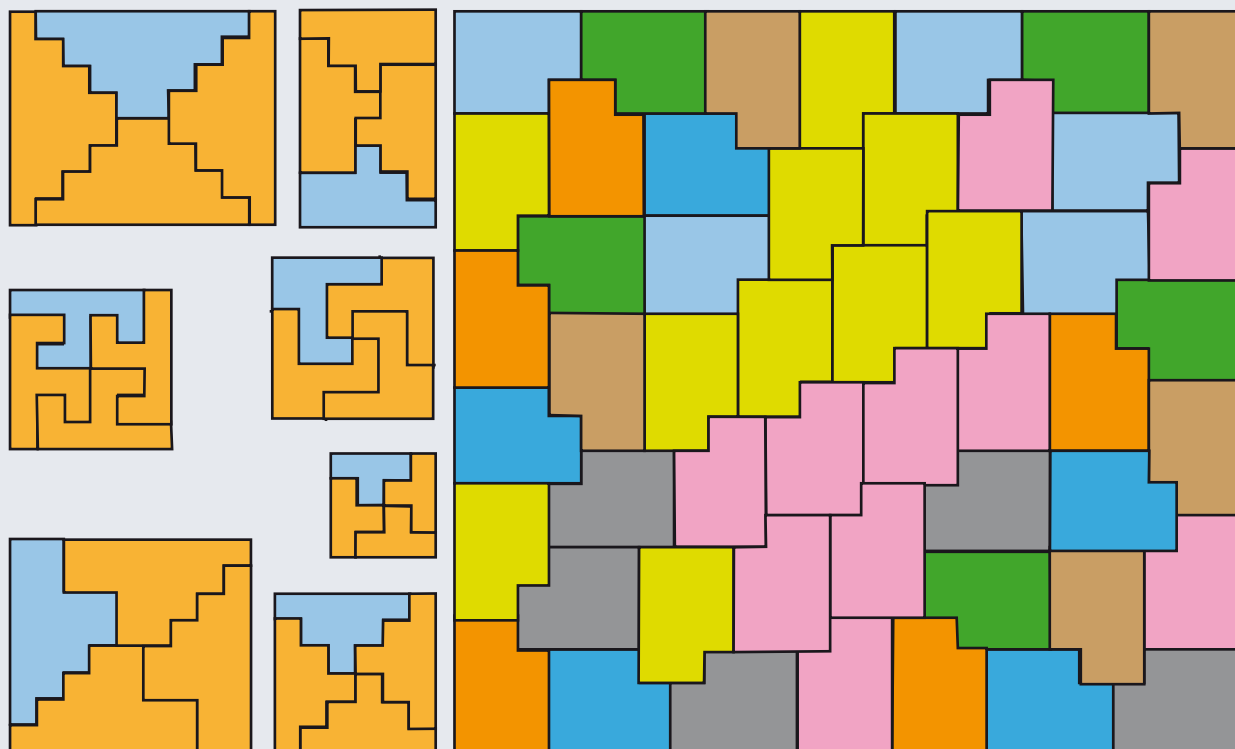
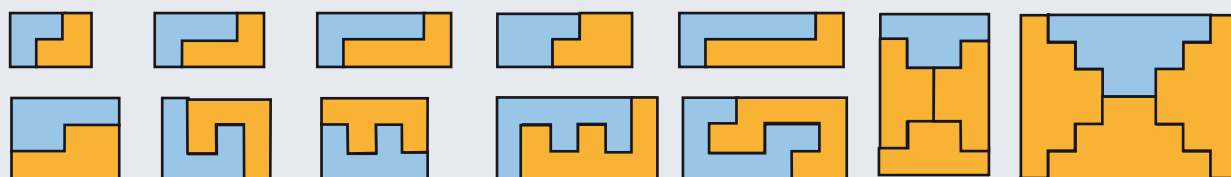
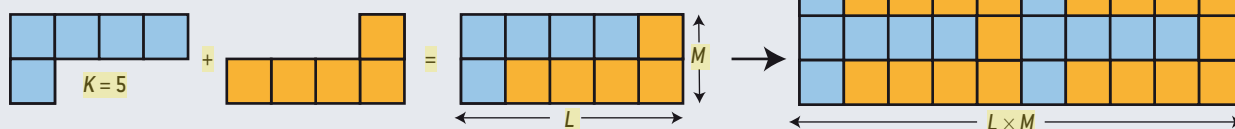
Les exemples donnés sont des formes autopavables par 4 copies (en haut) et des formes autopavables par 9 copies (en bas). On voit que certaines de ces formes sont autopavables de plusieurs façons différentes. (La symétrie miroir est autorisée.)



Polyominos

Les polyominos sont les formes géométriques obtenues en collant des carrés de même taille, côté contre côté. Pour démontrer qu'un polyomino de K carrés est autopavable, il suffit de réussir à assembler plusieurs copies du polyomino, disons P copies, pour former un rectangle de côtés L et M (on a alors $L \times M = K \times P$).

En effet, en assemblant L lignes de M exemplaires de ce rectangle, on fabrique un carré de côté $L \times M$. Ce carré contient $P \times L \times M = K \times P^2$ polyominos de départ et son aire est $K^2 \times P^2 = L^2 \times M^2$. Ce carré lui-même utilisé K fois donne le polyomino de départ en plus grand. Le grand polyomino reconstitué comportera $K^2 \times P^2 = L^2 \times M^2$ polyominos plus petits et son aire sera $K^3 \times P^2 = K \times L^2 \times M^2$.



Entre autres découvertes, Lee Sallows a ainsi montré qu'il existe 7 ensembles autopavables réguliers, composés chacun de 4 octominos (voir l'encadré page 80, en bas). Les cinq ensembles dessinés en étoiles ont l'extraordinaire propriété que chacun peut paver non seulement ses propres octominos, mais aussi tous les octominos des autres. Une flèche liant deux quadruplets d'octominos A et B signifie que les octominos de A pavent, en les utilisant chacun une fois exactement, les octominos de B.

La complexité combinatoire du problème ne doit pas être sous-estimée : il est vraiment difficile pour un ordinateur d'explorer toutes les combinaisons possibles, même dans le cas des quadruplets d'octominos, et il semblait quasiment impossible d'envisager des ensembles autopavables comportant 9 polyominos. C'était sans compter sur la détermination et le subtil esprit géométrique de Lee Sallows. Menant un raisonnement que nous allons détailler, il a réussi à concevoir une puissante et astucieuse méthode de création d'ensembles autopavables qui a produit de nombreuses configurations hors de portée de l'ordinateur.

Une simple astuce ?

La méthode est fondée sur les formes autopavables simples, les *rep-tiles* dont parlait l'article de Martin Gardner de 1963. Pour qui ouvre les yeux, ces formes recèlent les composants des nouvelles constructions.

— On part donc d'une figure unique autopavable. Prenons l'exemple du sphinx montré dans l'encadré page 77.

— On regroupe dans le découpage les petites formes de sphinx deux par deux, ce qui donne trois schémas différents et six formes nouvelles A, B, C, D, E et F, dont deux ne sont pas d'un seul tenant, D et F (voir l'encadré page 82, en haut).

— Par construction, en ne considérant que les pièces A, B, C et D, on peut paver deux grands sphinx. Mais ces deux grands sphinx, une fois correctement repositionnés, sont exactement ce qu'il faut pour reconstituer A, B, C et D en grand puisque, justement, A, B, C et D sont chacun la réunion de deux

De petits puzzles

A côté de chaque polyomino (non rectangulaire) comportant 3, 4, 5 ou 6 carrés de base et pouvant paver un rectangle, on a indiqué combien d'exemplaires au minimum il fallait pour obtenir un rectangle. C'est un jeu

pour vous

de trouver l'assemblage solution. Pour le dernier polyomino, la difficile construction est dessinée. Si vous ne trouvez pas les solutions, voir :

<http://www2.stetson.edu/~efriedma/order/>

