

LOGIQUE & CALCUL

Je le vois, je le démontre, mais est-ce que je le comprends ?

L'un des côtés fascinants des mathématiques est qu'elles recèlent d'innombrables vérités à la fois assez simples et très inattendues. Illustration avec huit exemples étonnants.

Jean-Paul DELAHAYE

Le raisonnement mathématique n'est pas un simple calcul dont on prévoit ce qu'il va donner et dont on connaît à l'avance toutes les limites ; il engendre parfois des miracles. Nous allons présenter huit petites énigmes et leurs solutions qui vous sembleront inattendues, absurdes ou invraisemblables.

Elles nous font toutes découvrir une propriété assez simple qui réalise une sorte d'exploit *a priori* impossible, ou qui nous place devant une affirmation très éloignée de tout ce qu'on pouvait imaginer.

Miracle 1 - Connaissez-vous la racine de 2 ?

Uniquement de tête, donc sans utiliser ni ordinateur, ni crayon, ni papier... ni smartphone, trouvez le 200^e chiffre décimal après la virgule du nombre $(1 + \sqrt{2})^{1000}$. Oui, c'est possible !

Réponse

$(1 + \sqrt{2})^{1000} + (1 - \sqrt{2})^{1000}$ est un entier, car quand on développe, tous les termes comportant $\sqrt{2}$ s'annulent, comme avec $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6$.

Or $(1 - \sqrt{2})^{1000}$ est très petit puisque c'est un nombre inférieur à $1/2$ élevé à la puissance 1 000. Sachant que $2^{10} = 1 024$, on voit qu'il est inférieur à $1/2^{1000} = 1/1 024^{100} < 1/[10^3]^{100} = 1/10^{300}$.

Le nombre de l'énoncé est donc la différence entre un entier et un nombre plus petit que 0,000...0001 avec 300 zéros. Tous ses chiffres entre la virgule et le 300^e chiffre après la virgule sont donc des 9.

Cette énigme provient d'une rubrique de problèmes d'Elwyn Berlekamp et Joe Buhler parue dans le numéro d'automne 1999 du bulletin *Emissary*, une publication du MSRI, l'Institut de recherche en sciences mathématiques de l'université de Californie à Berkeley.

Miracle 2 - La somme des chiffres

La magicienne des nombres vous dit : « Prenez un nombre entier quelconque composé de chiffres croissants au sens large, et dont les deux derniers chiffres sont différents (par exemple 1 333 456 778). Multipliez-le par 9. » Elle ajoute : « Je connais la somme des chiffres du résultat. » Pourquoi ?

Réponse

Parce que la somme des chiffres est toujours 9. Avec notre exemple : $9 \times 1 333 456 778 = 12 001 111 002$. La somme des chiffres est bien 9. C'est inattendu, car le nombre de départ peut être très long, et donc celui obtenu en multipliant par 9 aussi.

La démonstration de cet étrange et étonnant résultat se fonde sur la méthode de soustraction apprise à l'école. Partons d'un entier N de 6 chiffres (la méthode s'étend

à un nombre quelconque de chiffres) : $N = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ avec $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 < a_6$.

Le nombre $9 \times N$ est égal à $10 \times N - N$. C'est donc le résultat de la soustraction suivante :

$$\begin{array}{r} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 0 \\ - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \times N \\ - N \\ \hline \end{array}$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 \quad 9 \times N$$

Le chiffre b_7 vaut $10 - a_6$, car il y a une retenue.

Le chiffre b_6 vaut $a_6 + 1 - a_5$, car la retenue précédente a été reportée. L'hypothèse $a_6 > a_5$ assure qu'il n'y a pas de nouvelle retenue à introduire et à prendre en compte pour la colonne suivante.

Le chiffre b_5 vaut $a_5 - a_4$, car $a_5 \geq a_4$ assure qu'il n'y a pas de nouvelle retenue à introduire. De même, b_4 vaut $a_4 - a_3$, b_3 vaut $a_3 - a_2$, b_2 vaut $a_2 - a_1$, et b_1 vaut a_1 . La somme des chiffres de $9N$ est donc : $(10 - a_6) + (a_6 - a_5 - 1) + (a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 = 10 - 1 = 9$.

La découverte de ce beau petit résultat semble due à Felix Lazebnik, de l'université du Delaware (*Mathematics Magazine*, vol. 87(3), pp. 212-221, 2014).

Miracle 3 - Un nombre exceptionnel ?

La magicienne des nombres souhaite vous étonner une seconde fois. Elle pose sur la