LOGIQUE & CALCUL

Je le vois, je le démontre, mais est-ce que je le comprends ?

L'un des côtés fascinants des mathématiques est qu'elles recèlent d'innombrables vérités à la fois assez simples et très inattendues. Illustration avec huit exemples étonnants.

Jean-Paul DELAHAYE

Le raisonnement mathématique n'est pas un simple calcul dont on prévoit ce qu'il va donner et dont on connaît à l'avance toutes les limites ; il engendre parfois des miracles. Nous allons présenter huit petites énigmes et leurs solutions qui vous sembleront inattendues, absurdes ou invraisemblables.

Elles nous font toutes découvrir une propriété assez simple qui réalise une sorte d'exploit *a priori* impossible, ou qui nous place devant une affirmation très éloignée de tout ce qu'on pouvait imaginer.

Miracle 1 - Connaissez-vous la racine de 2 ?

Uniquement de tête, donc sans utiliser ni ordinateur, ni crayon, ni papier… ni smartphone, trouvez le 200e chiffre décimal après la virgule du nombre $(1+\sqrt{2})^{1\,000}$. Oui, c'est possible !

Réponse

$(1+\sqrt{2})^{1\,000} + (1-\sqrt{2})^{1\,000}$ est un entier, car quand on développe, tous les termes comportant $\sqrt{2}$ s'annulent, comme avec $(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2 = 6$.

Or $(1-\sqrt{2})^{1\,000}$ est très petit puisque c'est un nombre inférieur à 1/2 élevé à la puissance 1 000. Sachant que $2^{10} = 1\,024$, on voit qu'il est inférieur à $1/2^{1\,000} = 1/1\,024^{100} < 1/(10^3)^{100} = 1/10^{300}$.

Le nombre de l'énoncé est donc la différence entre un entier et un nombre plus petit que 0,000…0001 avec 300 zéros. Tous ses chiffres entre la virgule et le 300e chiffre après la virgule sont donc des 9.

Cette énigme provient d'une rubrique de problèmes d'Elwyn Berlekamp et Joe Buhler parue dans le numéro d'automne 1999 du bulletin *Emissary,* une publication du MSRI, l'Institut de recherche en sciences mathématiques de l'université de Californie à Berkeley.

Miracle 2 - La somme des chiffres

La magicienne des nombres vous dit : « Prenez un nombre entier quelconque composé de chiffres croissants au sens large, et dont les deux derniers chiffres sont différents (par exemple 1 333 456 778). Multipliez-le par 9. » Elle ajoute : « Je connais la somme des chiffres du résultat. » Pourquoi ?

Réponse

Parce que la somme des chiffres est toujours 9. Avec notre exemple : $9 \times 1\,333\,456\,778 = 12\,001\,111\,002$. La somme des chiffres est bien 9. C'est inattendu, car le nombre de départ peut être très long, et donc celui obtenu en multipliant par 9 aussi.

La démonstration de cet étrange et étonnant résultat se fonde sur la méthode de soustraction apprise à l'école. Partons d'un entier N de 6 chiffres (la méthode s'étend à un nombre quelconque de chiffres) : $N = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$
avec $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5 < a_6$.

Le nombre $9 \times N$ est égal à $10 \times N - N$. C'est donc le résultat de la soustraction suivante :

$$\begin{array}{lll} & a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,0 & 10\times N \\ - & \quad a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6 & -N \\ \hline & b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6\,b_7 & 9\times N \end{array}$$

Le chiffre b_7 vaut $10 - a_6$, car il y a une retenue.

Le chiffre b_6 vaut $a_6 + 1 - a_5$, car la retenue précédente a été reportée. L'hypothèse $a_6 > a_5$ assure qu'il n'y a pas de nouvelle retenue à introduire et à prendre en compte pour la colonne suivante.

Le chiffre b_5 vaut $a_5 - a_4$, car $a_5 \geqslant a_4$ assure qu'il n'y a pas de nouvelle retenue à introduire. De même, b_4 vaut $a_4 - a_3$, b_3 vaut $a_3 - a_2$, b_2 vaut $a_2 - a_1$, et b_1 vaut a_1. La somme des chiffres de $9N$ est donc :
$(10 - a_6) + (a_6 - a_5 - 1) + (a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 = 10 - 1 = 9$.

La découverte de ce beau petit résultat semble due à Felix Lazebnik, de l'université du Delaware (*Mathematics Magazine,* vol. 87(3), pp. 212-221, 2014).

Miracle 3 - Un nombre exceptionnel ?

La magicienne des nombres souhaite vous étonner une seconde fois. Elle pose sur la

Le théorème universel des cordes

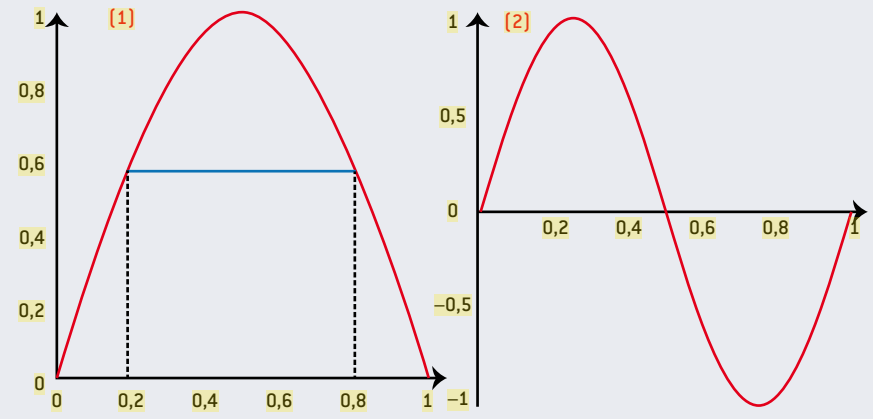
Pour une courbe donnée, une corde est un segment reliant deux points de la courbe. Entre $x = 0$ et $x = 1$, la fonction continue $f(x) = \sin(\pi x)$ a des cordes horizontales de toutes les longueurs L possibles, pour L compris entre 0 et 1. On a ainsi dessiné, sur le schéma (1), la corde de longueur 0,6.

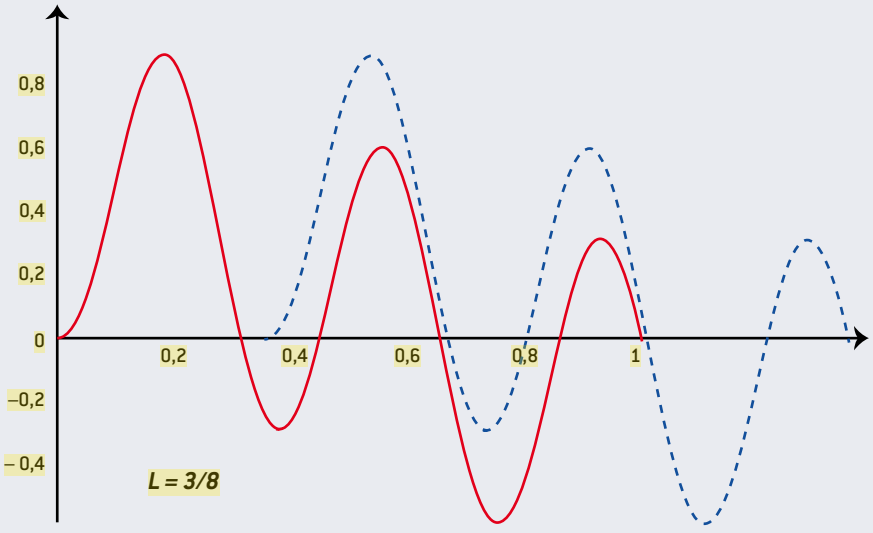
Ce n'est pas le cas de la fonction continue $f(x) = \sin(2\pi x)$: on voit clairement sur le schéma (2) qu'elle n'a aucune corde horizontale de longueur L pour $1/2 < L < 1$.

Le théorème universel des cordes stipule que pour toute fonction continue f de l'intervalle [0, 1] dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels telle que $f(0) = f(1)$, et pour tout entier positif n, il existe une corde horizontale de longueur $L = 1/n$ sur le graphe de f. De plus, pour tout nombre réel L qui n'est pas l'inverse d'un entier positif, il existe des fonctions continues de [0, 1] dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et telles que $f(0) = f(1)$ dont le graphe ne comporte aucune corde horizontale de longueur L. En résumé : *Les longueurs de cordes horizontales inévitables, et les seules inévitables, sont les inverses des entiers positifs.*

La démonstration de la partie affirmative est donnée dans le texte de l'article. La partie négative, démontrée par Paul Lévy, consiste à étudier la fonction $g_L(x) = \sin^2(\pi x/L) - x \sin^2(\pi/L)$, qui n'a pas de corde de longueur L si L n'est pas l'inverse d'un entier.

Sans détailler l'étude de $g_L(x)$, on peut observer le résultat sur les deux dessins suivants. Pour $L = 3/8$, puis pour $L = 3/17$, on a dessiné le graphe de $g_L(x)$ ainsi que la même courbe décalée horizontalement de L vers la droite. Le fait que la courbe et sa version décalée ne se coupent pas, ce que l'on observe, signifie qu'il n'existe pas de corde de longueur L.





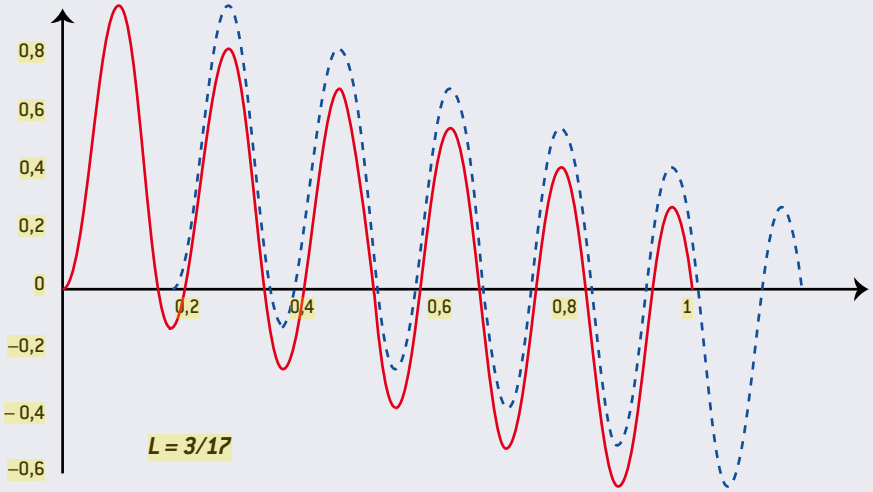


table un verre transparent dans lequel un foulard froissé a été enfoncé. Elle vous donne un papier et un crayon et vous invite à choisir un nombre N de quatre chiffres non tous égaux (par exemple, le nombre 3 333 n'est pas autorisé). Elle demande :

« Classez les chiffres de N par ordre croissant, cela vous donne un nombre X à quatre chiffres ; classez les chiffres de N par ordre décroissant, cela vous donne un nombre Y à quatre chiffres. Calculez $Z = Y - X$. Recommencez à partir de Z les mêmes opérations. Faites-le jusqu'à ce que cela devienne inutile, le Z obtenu redonnant Z. »

En quelques secondes, vous faites ce qui a été demandé et vous disposez donc d'un résultat Z à quatre chiffres. La magicienne tire alors le foulard du verre et le déploie. Il y est écrit 6 174. C'est effectivement le Z que vous avez trouvé. Pourquoi ?

Réponse

Quel que soit le nombre initial N, on finit toujours par tomber sur 6 174 ! Je ne connais aucune preuve par le raisonnement de ce résultat, mais comme c'est une propriété vérifiable par un calcul fini consistant à essayer tous les N possibles, j'ai écrit un petit programme et me suis assuré qu'on obtient effectivement toujours $Z = 6\,174$. Cette preuve par l'ordinateur est un peu décevante, mais ne laisse aucun doute.

Voici quelques informations supplémentaires sur cette bizarrerie des nombres à quatre chiffres qui, aujourd'hui, n'a aucune explication profonde ou générale. Cette propriété exceptionnelle du nombre 6 174 pourrait être le simple fruit du hasard.

• Aucun autre nombre que 6 174 ne retombe sur lui-même quand on mène le calcul demandé.

• Le nombre maximal d'étapes de calcul pour arriver à 6 174 est 7. C'est par exemple ce qui se passe pour 1 400, qui donne successivement 4 086, 8 172, 7 443, 3 996, 6 264, 4 176, 6 174.

• Le nombre moyen d'étapes de calcul avant d'arriver à 6 174 est 4,7. Ce nombre d'étapes prend toutes les valeurs possibles entre 0 (pour 6 174) et 7. Le nombre X_N d'entiers à quatre chiffres exigeant N étapes de calcul est donné par la liste suivante : $X_0 = 1$, $X_1 = 356$, $X_2 = 519$, $X_3 = 2\,124$, $X_4 = 1\,124$, $X_5 = 1\,379$, $X_6 = 1\,508$, $X_7 = 1\,980$.

Le même miracle se produit quand on part d'un nombre de trois chiffres non tous égaux. Cela conduit invariablement à 495, là encore sans qu'on puisse faire autre chose que le constater. Nous sommes dans une situation où l'on connaît un résultat inattendu, qu'on prouve par la force du calcul, mais qu'au fond on ne comprend pas.

Le mystère est d'autant plus profond que, si l'on essaye la même chose en partant de nombres de cinq chiffres, ça ne marche plus : tous les nombres conduisent à des cycles (il ne peut pas en être autrement), mais pas nécessairement le même.

Cette formidable propriété de 6 174 et de 495 a été découverte par le mathématicien indien Dattatreya Kaprekar (*Scripta Mathematica,* vol. 15, pp. 244-245, 1949). On trouvera des précisions sur https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174.

Miracle 4 - La puissance 2^{29} de Lenstra

Comme pour le premier miracle, vous devez répondre juste en raisonnant, sans utiliser d'ordinateur, ni de papier, ni de crayon… ni de smartphone : sachant que 2^{29} comporte 9 chiffres tous différents, quel est le chiffre qui manque ?

Pas besoin d'être un calculateur prodige qui calculerait vraiment 2^{29}. Même si cela semble impossible, les informations de l'énoncé permettent de trouver la réponse.

Réponse

Pour n variant de 1 à l'infini, le nombre 2^n modulo 9 (c'est-à-dire en comptant comme quand on fait une « preuve par 9 », *voir l'encadré ci-contre*) vaut successivement 2, 4, 8, 7 (car 16 donne $1 + 6 = 7$), 5 (car 32 donne $3 + 2 = 5$), 1 (car 64 donne 10, qui donne 1), puis de nouveau 2, 4, 8, 7, 5, 1 cycliquement. Puisque $29 = 6 \times 5 - 1$, on en déduit que 2^{29} modulo 9 vaut 5. On sait de plus que tous les chiffres, sauf l'un d'eux, sont présents. S'ils étaient tous présents, la valeur de 2^{29} modulo 9 serait celle de la somme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, soit 0 modulo 9. Seule la suppression du 4 conduit à un total qui vaut 5 modulo 9. C'est donc le chiffre 4 qui manque. Ce que l'on vérifie sans peine, cette fois avec une machine, puisque $2^{29} = 536\,870\,912$.

Le problème est dû au célèbre mathématicien néerlandais Hendrik Lenstra, spécialiste des algorithmes de factorisation des entiers.

La preuve par neuf

Le reste de la division par 9 d'un entier positif n, que l'on note « n modulo 9 », est très utile. Il se calcule simplement en faisant la somme des chiffres de n, puis en recommençant si ce que l'on a obtenu demeure supérieur à 9. Et ainsi de suite.

Pour 35 581 929, par exemple, on calcule $3+5+5+8+1+9+2+9 = 42$, puis $4+2 = 6$; donc 35 581 929 modulo 9 est égal à 6. Pour le justifier, on remarque que 10^n est égal à 99…9 + 1, c'est-à-dire à 1 modulo 9.

La « preuve par 9 » d'une multiplication consiste à vérifier que la valeur modulo 9 du résultat qu'on a calculé est le produit des valeurs modulo 9 des facteurs. La méthode fonctionne avec les additions, les soustractions et les divisions.

Supposons que l'on veuille vérifier l'opération $2\,537 \times 823 = 2\,087\,951$. On calcule les valeurs modulo 9 des facteurs : 2 537 donne $2+5+3+7 = 17$ qui donne 8, et 823 donne $8+2+3 = 13$ qui donne 4. Le produit de ces valeurs est 32, qui vaut 5 modulo 9. On doit donc trouver 5 modulo 9 pour le résultat 2 087 951. Et en effet, on a $2+0+8+7+9+5+1 = 32$, qui est égal à 5 modulo 9.

L'opération est donc probablement juste. La certitude n'est pas de 100 %, car on peut faire une erreur qui conduise quand même à la valeur attendue.