table un verre transparent dans lequel un foulard froissé a été enfoncé. Elle vous donne un papier et un crayon et vous invite à choisir un nombre *N* de quatre chiffres non tous égaux (par exemple, le nombre 3 333 n'est pas autorisé). Elle demande :

« Classez les chiffres de *N* par ordre croissant, cela vous donne un nombre *X* à quatre chiffres ; classez les chiffres de *N* par ordre décroissant, cela vous donne un nombre *Y* à quatre chiffres. Calculez $Z = Y - X$. Recommencez à partir de *Z* les mêmes opérations. Faites-le jusqu'à ce que cela devienne inutile, le *Z* obtenu redonnant *Z*. »

En quelques secondes, vous faites ce qui a été demandé et vous disposez donc d'un résultat *Z* à quatre chiffres. La magicienne tire alors le foulard du verre et le déploie. Il y est écrit 6 174. C'est effectivement le *Z* que vous avez trouvé. Pourquoi ?

Réponse

Quel que soit le nombre initial *N*, on finit toujours par tomber sur 6 174 ! Je ne connais aucune preuve par le raisonnement de ce résultat, mais comme c'est une propriété vérifiable par un calcul fini consistant à essayer tous les *N* possibles, j'ai écrit un petit programme et me suis assuré qu'on obtient effectivement toujours $Z = 6\,174$. Cette preuve par l'ordinateur est un peu décevante, mais ne laisse aucun doute.

Voici quelques informations supplémentaires sur cette bizarrerie des nombres à quatre chiffres qui, aujourd'hui, n'a aucune explication profonde ou générale. Cette propriété exceptionnelle du nombre 6 174 pourrait être le simple fruit du hasard.

• Aucun autre nombre que 6 174 ne retombe sur lui-même quand on mène le calcul demandé.

• Le nombre maximal d'étapes de calcul pour arriver à 6 174 est 7. C'est par exemple ce qui se passe pour 1 400, qui donne successivement 4 086, 8 172, 7 443, 3 996, 6 264, 4 176, 6 174.

• Le nombre moyen d'étapes de calcul avant d'arriver à 6 174 est 4,7. Ce nombre d'étapes prend toutes les valeurs possibles entre 0 (pour 6 174) et 7. Le nombre X_N d'entiers à quatre chiffres exigeant *N* étapes de calcul est donné par la liste suivante : $X_0 = 1$, $X_1 = 356$, $X_2 = 519$, $X_3 = 2\,124$, $X_4 = 1\,124$, $X_5 = 1\,379$, $X_6 = 1\,508$, $X_7 = 1\,980$.

Le même miracle se produit quand on part d'un nombre de trois chiffres non tous égaux. Cela conduit invariablement à 495, là encore sans qu'on puisse faire autre chose que le constater. Nous sommes dans une situation où l'on connaît un résultat inattendu, qu'on prouve par la force du calcul, mais qu'au fond on ne comprend pas.

Le mystère est d'autant plus profond que, si l'on essaye la même chose en partant de nombres de cinq chiffres, ça ne marche plus : tous les nombres conduisent à des cycles (il ne peut pas en être autrement), mais pas nécessairement le même.

Cette formidable propriété de 6 174 et de 495 a été découverte par le mathématicien indien Dattatreya Kaprekar (*Scripta Mathematica,* vol. 15, pp. 244-245, 1949). On trouvera des précisions sur https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174.

Miracle 4 - La puissance 2^{29} de Lenstra

Comme pour le premier miracle, vous devez répondre juste en raisonnant, sans utiliser d'ordinateur, ni de papier, ni de crayon… ni de smartphone : sachant que 2^{29} comporte 9 chiffres tous différents, quel est le chiffre qui manque ?

Pas besoin d'être un calculateur prodige qui calculerait vraiment 2^{29}. Même si cela semble impossible, les informations de l'énoncé permettent de trouver la réponse.

Réponse

Pour *n* variant de 1 à l'infini, le nombre 2^n modulo 9 (c'est-à-dire en comptant comme quand on fait une « preuve par 9 », *voir l'encadré ci-contre*) vaut successivement 2, 4, 8, 7 (car 16 donne $1 + 6 = 7$), 5 (car 32 donne $3 + 2 = 5$), 1 (car 64 donne 10, qui donne 1), puis de nouveau 2, 4, 8, 7, 5, 1 cycliquement. Puisque $29 = 6 \times 5 - 1$, on en déduit que 2^{29} modulo 9 vaut 5. On sait de plus que tous les chiffres, sauf l'un d'eux, sont présents. S'ils étaient tous présents, la valeur de 2^{29} modulo 9 serait celle de la somme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, soit 0 modulo 9. Seule la suppression du 4 conduit à un total qui vaut 5 modulo 9. C'est donc le chiffre 4 qui manque. Ce que l'on vérifie sans peine, cette fois avec une machine, puisque $2^{29} = 536\,870\,912$.

Le problème est dû au célèbre mathématicien néerlandais Hendrik Lenstra, spécialiste des algorithmes de factorisation des entiers.

La preuve par neuf

Le reste de la division par 9 d'un entier positif *n*, que l'on note « *n* modulo 9 », est très utile. Il se calcule simplement en faisant la somme des chiffres de *n*, puis en recommençant si ce que l'on a obtenu demeure supérieur à 9. Et ainsi de suite.

Pour 35 581 929, par exemple, on calcule $3 + 5 + 5 + 8 + 1 + 9 + 2 + 9 = 42$, puis $4 + 2 = 6$; donc 35 581 929 modulo 9 est égal à 6. Pour le justifier, on remarque que 10^n est égal à 99…9 + 1, c'est-à-dire à 1 modulo 9.

La « preuve par 9 » d'une multiplication consiste à vérifier que la valeur modulo 9 du résultat qu'on a calculé est le produit des valeurs modulo 9 des facteurs. La méthode fonctionne avec les additions, les soustractions et les divisions.

Supposons que l'on veuille vérifier l'opération $2\,537 \times 823 = 2\,087\,951$. On calcule les valeurs modulo 9 des facteurs : 2 537 donne $2 + 5 + 3 + 7 = 17$ qui donne 8, et 823 donne $8 + 2 + 3 = 13$ qui donne 4. Le produit de ces valeurs est 32, qui vaut 5 modulo 9. On doit donc trouver 5 modulo 9 pour le résultat 2 087 951. Et en effet, on a $2 + 0 + 8 + 7 + 9 + 5 + 1 = 32$, qui est égal à 5 modulo 9.

L'opération est donc probablement juste. La certitude n'est pas de 100 %, car on peut faire une erreur qui conduise quand même à la valeur attendue.