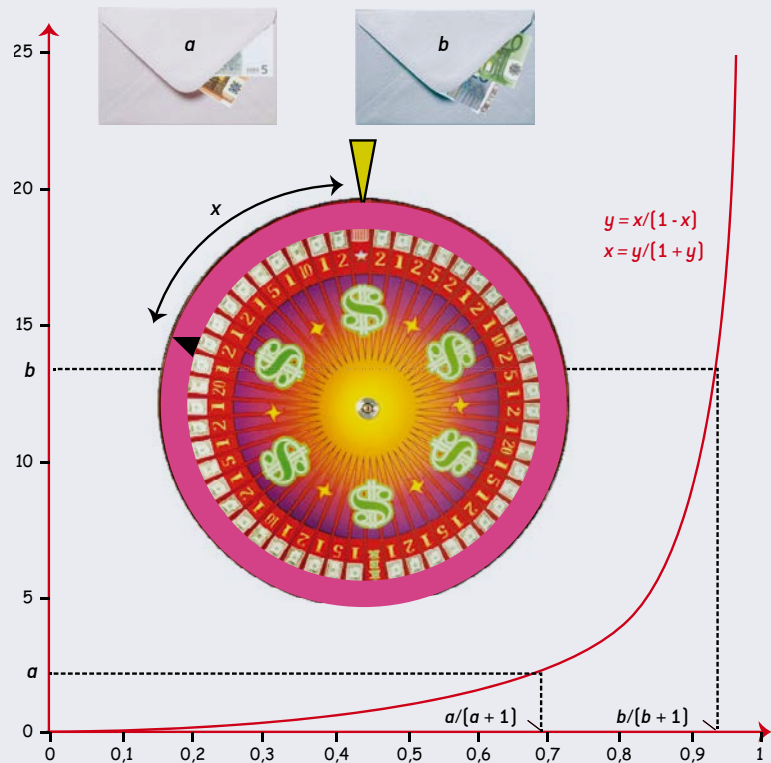


Le choix de l'enveloppe

Vous devez choisir entre deux enveloppes contenant des sommes a et b différentes et inconnues. Vous ouvrez la première et trouvez une somme S . Si on vous le permet, avez-vous intérêt à changer d'enveloppe ?

Il est possible de gagner (obtenir le maximum) dans plus de la moitié des cas par la stratégie décrite dans le texte. Elle utilise la fonction $x \rightarrow x/(1-x)$ qui associe bijectivement à tout nombre réel x compris entre 0 et 1 un nombre réel compris entre 0 et l'infini (voir le graphe de la fonction, ci-contre). Une autre fonction continue ayant la même propriété définirait une autre procédure qui marcherait aussi (mais en conduisant à d'autres probabilités de gain).

L'idée de la stratégie est que, en choisissant x au hasard (par exemple à l'aide d'une roulette), on se fixe un seuil $y = x/(1-x)$ à atteindre ; si y n'est pas atteint, on change d'enveloppe, et ce choix sera le bon dans tous les cas où les contenus des enveloppes sont de part et d'autre de y . Globalement, cela donne une probabilité de gagner supérieure à 1/2. Ainsi, si les enveloppes contiennent les sommes $a = 10$ et $b = 100$, la probabilité de faire le bon choix est égale à 54,01 % (voir le texte).



Miracle 5 - Une incroyable stratégie

Vous avez devant vous deux enveloppes contenant deux sommes d'argent différentes. Vous en ouvrez une et regardez son contenu. Maintenant, vous devez choisir soit de garder le contenu de l'enveloppe que vous avez ouverte, soit de prendre l'autre enveloppe sans en connaître le contenu. Il existe une stratégie qui vous permet de faire le bon choix, c'est-à-dire de partir avec l'enveloppe contenant le plus, dans plus de 50 % des cas.

Cela semble absurde puisque vous n'ouvrirez qu'une enveloppe et ne connaîtrez rien de l'autre. L'étonnant est qu'une telle stratégie existe pourtant !

Réponse

Une façon de procéder consiste à :

1) Choisir au hasard uniformément un nombre réel x entre 0 et 1. On fait par exemple

tourner une roue de loterie dont le périmètre est de 1 mètre et qui a une marque sur ce périmètre ; une fois la roue arrêtée, on mesure sur le périmètre la distance x entre la marque et le point d'arrêt de la roue.

2) Calculer $y = x/(1-x)$, qui sera un nombre compris entre 0 et l'infini (voir l'encadré ci-dessus).

3) Si l'enveloppe ouverte contient plus de y euros, la garder ; sinon, prendre l'autre.

Pour démontrer que cette méthode donne plus de 50 % de chances de faire le bon choix, supposons que les enveloppes contiennent respectivement les sommes a et b , avec $a < b$, et calculons la probabilité de prendre la bonne enveloppe (celle qui contient b). Considérons deux cas.

Cas 1. Le nombre y est compris entre a et b . On sera certain de faire le bon choix, car si on a pris la bonne enveloppe, on n'en changera pas, et si on a pris la mauvaise, on en changera.

En utilisant l'équivalence des relations $y = x/(1-x)$ et $x = y/(1+y)$, on sait que le nombre y est compris entre a et b si et seulement si x est compris entre $a/(a+1)$ et $b/(b+1)$. Puisque x est tiré avec une probabilité uniforme entre 0 et 1, la probabilité c que x soit compris entre $a/(a+1)$ et $b/(b+1)$ est la longueur de l'intervalle $[a/(a+1), b/(b+1)]$. Autrement dit, $c = b/(b+1) - a/(a+1)$.

Cas 2. Le nombre y n'est pas compris entre a et b .

La probabilité d'avoir fait le bon choix est alors égale à 1/2. En effet :

– si a et b sont tous deux inférieurs à y , alors on aura choisi au hasard une enveloppe et on en changera, ce qui conduira à une enveloppe choisie au hasard, qui sera donc la meilleure avec une probabilité égale à 1/2.

– si a et b sont tous les deux supérieurs à y , alors on aura choisi une enveloppe au

Les scarabées tomberont tous !

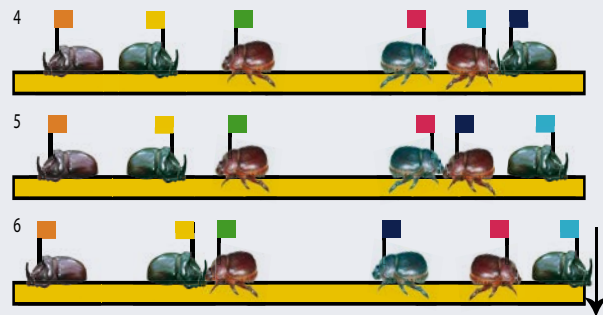
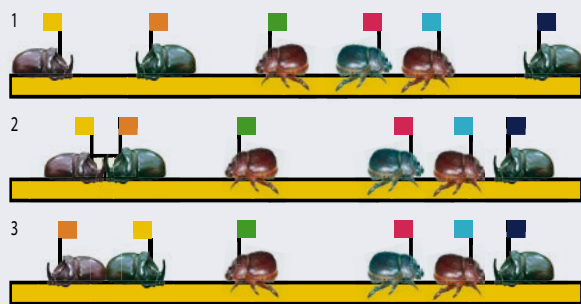
Des scarabées placés et orientés au hasard sur une règle de 1 mètre avancent de 1 centimètre par seconde. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font demi-tour. Tous les scarabées tomberont par terre en 100 secondes ou moins.

En effet, imaginons que chaque scarabée porte un

drapeau d'une couleur et que quand deux scarabées se

rencontrent, ils échantent leurs drapeaux. Chaque drapeau avancera dans une direction fixe et tombera donc par terre en moins de 100 secondes avec le scarabée qui le porte. Tous les drapeaux seront donc par terre en 100 secondes ou moins et donc

tous les scarabées qui les portent aussi. On montre sans peine que, dans certains cas, 100 secondes sont nécessaires. Ce problème est cité par Peter Winkler dans son merveilleux livre *Mathematical Mind-Benders* (A. K. Peters, 2007).



hasard et on ne la changera pas. Comme précédemment, on aura encore fait le bon choix avec une probabilité égale à $1/2$.

La probabilité de faire le bon choix quand y n'est pas compris entre a et b est donc de $1/2$. Comme la probabilité pour y de ne pas être dans l'intervalle $[a, b]$ est égale à $1 - c$, en regroupant les deux cas on trouve que la probabilité de faire le bon choix est $c + (1 - c)/2 = 1/2 + c/2 = 1/2 + [b/(b+1) - a/(a+1)]/2$, ce qui est strictement supérieur à $1/2$.

Pour $a = 10$ et $b = 100$, par exemple, la probabilité de garder la meilleure enveloppe est égale à :

$$1/2 + 1/2 \times (100/101 - 10/11) = 54,05 \%$$

Ce troublant miracle semble avoir été découvert plusieurs fois sous des formes variées. On le trouve mentionné, par exemple, par le mathématicien américain David Blackwell (1919-2010) et par le théoricien américain de l'information et spécialiste des probabilités Thomas Cover (1938-2012).

Miracle 6 - Les scarabées vont-ils tomber ?

Une famille de 20 scarabées se trouve sur une règle en bois en position horizontale dont

la longueur est de 1 mètre exactement. Ils sont placés au hasard sur la règle, chacun tourné vers la droite ou vers la gauche, au hasard. Chaque scarabée avance de 1 centimètre par seconde. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font tous les deux demi-tour. On suppose que le demi-tour est instantané et que les scarabées sont de longueur négligeable. Quand un scarabée arrive à une extrémité de la règle, il tombe par terre.

Sans connaître aucune donnée plus précise, et c'est là le miracle, on peut être certain que tous les scarabées seront par terre en moins d'une heure, et que c'est encore vrai si, au lieu de 20 scarabées, il y en a 30 ou 100. Pourquoi ? La réponse est donnée dans l'encadré ci-dessus.

Miracle 7 - Le théorème universel des cordes

Certains résultats mathématiques sont totalement déconcertants et semblent presque absurdes. C'est le cas du « théorème universel des cordes » dont j'avoue que, même après en avoir lu la démonstration, je n'arrive pas à en comprendre vraiment la raison. Nous le présentons sous la forme d'une énigme.

On considère une fonction continue f de l'intervalle $[0, 1]$ dans l'ensemble des nombres réels, telle que $f(0) = f(1)$. Par exemple $f(x) = x(1-x)$. On nomme corde horizontale de f de longueur L , tout segment horizontal de longueur L reliant deux points du graphe de f . Les abscisses de ces deux points sont x et $x+L$ et l'on a $f(x) = f(x+L)$ [voir l'encadré page 79].

Selon les fonctions, certaines longueurs de cordes horizontales sont possibles et d'autres non. Ainsi, pour $f(x) = x(1-x)$ ou $\sin(\pi x)$, toutes les longueurs L comprises entre 0 et 1 sont possibles (bien sûr, pour les fonctions f telles que définies plus haut, on est certain qu'elles ont une corde de longueur 1 car, par hypothèse, $f(0) = f(1)$). Mais pour la fonction $h(x) = \sin(2\pi x)$ (dessinée dans l'encadré page 79), il n'existe aucune corde horizontale de longueur strictement comprise entre $1/2$ et 1. D'autres longueurs L que la longueur 1 sont toujours possibles quelle que soit la fonction continue f satisfaisant $f(0) = f(1)$. Lesquelles ?

Réponse

Le résultat est sidérant : pour tout entier positif n , et quelle que soit la fonction f vérifiant les hypothèses, il y aura une corde horizontale de longueur $L = 1/n$. De plus,