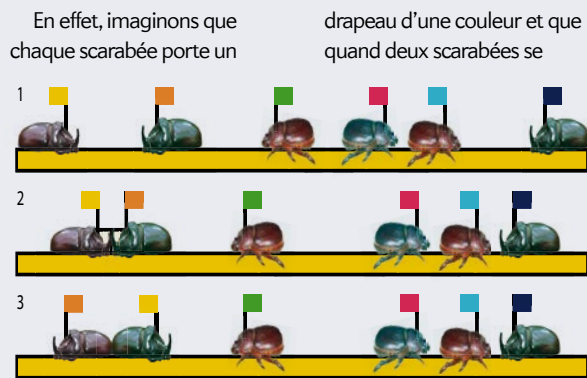


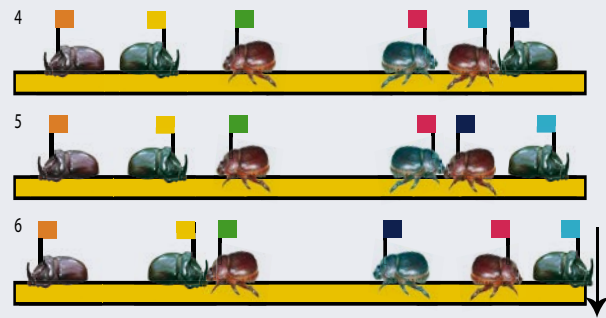
Les scarabées tomberont tous !

Des scarabées placés et orientés au hasard sur une règle de 1 mètre avancent de 1 centimètre par seconde. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font demi-tour. Tous les scarabées tomberont par terre en 100 secondes ou moins.



rencontrent, ils échangent leurs drapeaux. Chaque drapeau avancera dans une direction fixe et tombera donc par terre en moins de 100 secondes avec le scarabée qui le porte. Tous les drapeaux seront donc par terre en 100 secondes ou moins et donc

tous les scarabées qui les portent aussi. On montre sans peine que, dans certains cas, 100 secondes sont nécessaires. Ce problème est cité par Peter Winkler dans son merveilleux livre *Mathematical Mind-Benders* (A. K. Peters, 2007).



hasard et on ne la changera pas. Comme précédemment, on aura encore fait le bon choix avec une probabilité égale à $1/2$.

La probabilité de faire le bon choix quand y n'est pas compris entre a et b est donc de $1/2$. Comme la probabilité pour y de ne pas être dans l'intervalle $[a, b]$ est égale à $1 - c$, en regroupant les deux cas on trouve que la probabilité de faire le bon choix est $c + (1 - c)/2 = 1/2 + c/2 = 1/2 + (b/(b+1) - a/(a+1))/2$, ce qui est strictement supérieur à $1/2$.

Pour $a = 10$ et $b = 100$, par exemple, la probabilité de garder la meilleure enveloppe est égale à :

$$1/2 + 1/2 \times (100/101 - 10/11) = 54,05 \%$$

Ce troublant miracle semble avoir été découvert plusieurs fois sous des formes variées. On le trouve mentionné, par exemple, par le mathématicien américain David Blackwell (1919-2010) et par le théoricien américain de l'information et spécialiste des probabilités Thomas Cover (1938-2012).

Miracle 6 - Les scarabées vont-ils tomber ?

Une famille de 20 scarabées se trouve sur une règle en bois en position horizontale dont

la longueur est de 1 mètre exactement. Ils sont placés au hasard sur la règle, chacun tourné vers la droite ou vers la gauche, au hasard. Chaque scarabée avance de 1 centimètre par seconde. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font tous les deux demi-tour. On suppose que le demi-tour est instantané et que les scarabées sont de longueur négligeable. Quand un scarabée arrive à une extrémité de la règle, il tombe par terre.

Sans connaître aucune donnée plus précise, et c'est là le miracle, on peut être certain que tous les scarabées seront par terre en moins d'une heure, et que c'est encore vrai si, au lieu de 20 scarabées, il y en a 30 ou 100. Pourquoi ? La réponse est donnée dans l'encadré ci-dessus.

Miracle 7 - Le théorème universel des cordes

Certains résultats mathématiques sont totalement déconcertants et semblent presque absurdes. C'est le cas du « théorème universel des cordes » dont j'avoue que, même après en avoir lu la démonstration, je n'arrive pas à en comprendre vraiment la raison. Nous le présentons sous la forme d'une énigme.

On considère une fonction continue f de l'intervalle $[0, 1]$ dans l'ensemble des nombres réels, telle que $f(0) = f(1)$. Par exemple $f(x) = x(1-x)$. On nomme corde horizontale de f de longueur L , tout segment horizontal de longueur L reliant deux points du graphe de f . Les abscisses de ces deux points sont x et $x+L$ et l'on a $f(x) = f(x+L)$ [voir l'encadré page 79].

Selon les fonctions, certaines longueurs de cordes horizontales sont possibles et d'autres non. Ainsi, pour $f(x) = x(1-x)$ ou $\sin(\pi x)$, toutes les longueurs L comprises entre 0 et 1 sont possibles (bien sûr, pour les fonctions f telles que définies plus haut, on est certain qu'elles ont une corde de longueur 1 car, par hypothèse, $f(0) = f(1)$). Mais pour la fonction $h(x) = \sin(2\pi x)$ (dessinée dans l'encadré page 79), il n'existe aucune corde horizontale de longueur strictement comprise entre $1/2$ et 1. D'autres longueurs L que la longueur 1 sont toujours possibles quelle que soit la fonction continue f satisfaisant $f(0) = f(1)$. Lesquelles ?

Réponse

Le résultat est sidérant : pour tout entier positif n , et quelle que soit la fonction f vérifiant les hypothèses, il y aura une corde horizontale de longueur $L = 1/n$. De plus,

pour les nombres L qui ne sont pas des inverses de nombres entiers, il existe des fonctions satisfaisant les hypothèses et n'ayant aucune corde de longueur L .

La partie positive du théorème a été découverte en 1806 par le physicien André-Marie Ampère. Pour la partie négative, il a fallu attendre le mathématicien français Paul Lévy [1886-1971], qui la démontra en 1934.

Démontrons la partie positive. On considère, quel que soit l'entier $n > 1$, la fonction $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$, qui est définie pour tout x compris entre 0 et $1 - 1/n$. On a : $g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \dots + g(1 - 1/n) = f(0) - f(1) = 0$. On en déduit que la fonction g ne peut pas être partout strictement positive. Elle ne peut pas non plus être partout strictement négative. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (selon lequel une fonction continue qui vaut y en un point et z en un autre passe par toutes les valeurs comprises entre y et z), g prend donc la valeur 0. Autrement dit, il existe au moins une valeur x_0 tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = f(x_0 + 1/n)$, et il existe donc une corde horizontale de longueur $1/n$.

La fonction de Paul Lévy, qui montre que ce sont les seules longueurs de corde obligées, est $g_L(x) = \sin^2(\pi x/L) - x \sin^2(\pi/L)$, qui n'a pas de corde de longueur L si L n'est pas l'inverse d'un entier. L'étude qui le montre n'est pas très facile, mais en faisant dessiner par votre ordinateur la fonction $g_L(x) - g_L(x+L)$ pour x compris entre 1 et $1-L$, vous verrez qu'elle n'est jamais nulle [voir l'encadré page 79].

On trouvera une présentation de ce théorème peu connu dans le livre *A Primer of Real Functions*, de Ralf Boas [4^e édition, The Mathematical Association of America, 1996].

Miracle 8 - La période 3 implique le chaos

Terminons, cette fois sans donner de démonstrations car elles sont trop compliquées, par un incroyable résultat sur les cycles des fonctions continues.

On considère une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Pour tout x entre 0 et 1, on considère la suite numérique suivante : $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots, f(f(\dots(x)\dots))$.

Si cette suite retombe sur le nombre x initial, on dit que l'on a un cycle. Le plus petit entier pour lequel cela se produit est l'« ordre » du cycle. Par exemple, la fonction $f(x) = 1 - x$ est telle que tout $x \neq 1/2$ engendre un cycle d'ordre 2 : en partant de $x = 1/3$, on a le cycle $1/3 \rightarrow 2/3 \rightarrow 1/3$.

On a la stupéfiante propriété suivante, découverte plusieurs fois, en particulier par Tien-Yien Li et James Yorke (« Period three implies chaos », *The American Mathematical Monthly*, vol. 82 [10], pp. 985-992, 1975) : si f a un cycle d'ordre 3, alors elle a des cycles de tout ordre. Mais l'inverse est faux : pour tout $k \neq 3$, il existe des fonctions ayant un cycle d'ordre k et n'ayant pas de cycle d'ordre 3.

Le théorème a été rendu plus précis en 1964 par le mathématicien ukrainien Oleksandr Charkovski, qui a découvert une relation de nécessité très subtile et totalement inattendue entre les ordres des cycles. L'ordre 3 implique l'ordre 5 qui implique le 7, qui implique le 9, etc. Mais aussi,

3 → 5 → 7 → 9 → 11 → ... → (2n + 1).2⁰ → ...
 → 3.2 → 5.2 → 7.2 → 9.2 → 11.2 → ... → (2n + 1).2¹ → ...
 → 3.2² → 5.2² → 7.2² → 9.2² → 11.2² → ... → (2n + 1).2² → ...
 → 3.2³ → 5.2³ → 7.2³ → 9.2³ → 11.2³ → ... → (2n + 1).2³ → ...
 ⋮
 → ... → 2ⁿ → ... → 2⁴ → 2³ → 2² → 2 → 1

le 6 implique le 10, qui implique le 14, etc. Ce système d'implication est défini par le tableau ci-dessus qu'on doit lire ligne par ligne, du haut vers le bas.

Ce tableau ne peut pas être simplifié, car il existe par exemple des fonctions ayant des cycles d'ordre 10 (donc 14, 18, etc.), mais aucun cycle d'ordre 6, 3, 5, 7, ... Pour des détails, voir Chung-Wu Ho et Charles Morris, « A graph-theoretic proof of Sharkovskii's theorem on the periodic points of continuous functions », *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 96 [2], pp. 361-370, 1981 (<http://bit.ly/2haC9LH>) et l'article *Sharkovskii's theorem* sur Wikipedia.

Qui aurait imaginé que le seul fait d'être une fonction continue d'un intervalle dans lui-même cachait ce tableau mystérieux ? ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur

au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr