

pour les nombres L qui ne sont pas des inverses de nombres entiers, il existe des fonctions satisfaisant les hypothèses et n'ayant aucune corde de longueur L .

La partie positive du théorème a été découverte en 1806 par le physicien André-Marie Ampère. Pour la partie négative, il a fallu attendre le mathématicien français Paul Lévy [1886-1971], qui la démontra en 1934.

Démontrons la partie positive. On considère, quel que soit l'entier $n > 1$, la fonction $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$, qui est définie pour tout x compris entre 0 et $1 - 1/n$. On a : $g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \dots + g(1 - 1/n) = f(0) - f(1) = 0$. On en déduit que la fonction g ne peut pas être partout strictement positive. Elle ne peut pas non plus être partout strictement négative. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (selon lequel une fonction continue qui vaut y en un point et z en un autre passe par toutes les valeurs comprises entre y et z), g prend donc la valeur 0. Autrement dit, il existe au moins une valeur x_0 tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = f(x_0 + 1/n)$, et il existe donc une corde horizontale de longueur $1/n$.

La fonction de Paul Lévy, qui montre que ce sont les seules longueurs de corde obligées, est $g_L(x) = \sin^2(\pi x/L) - x \sin^2(\pi/L)$, qui n'a pas de corde de longueur L si L n'est pas l'inverse d'un entier. L'étude qui le montre n'est pas très facile, mais en faisant dessiner par votre ordinateur la fonction $g_L(x) - g_L(x+L)$ pour x compris entre 1 et $1-L$, vous verrez qu'elle n'est jamais nulle (voir l'encadré page 79).

On trouvera une présentation de ce théorème peu connu dans le livre *A Primer of Real Functions*, de Ralf Boas (4^e édition, The Mathematical Association of America, 1996).

Miracle 8 - La période 3 implique le chaos

Terminons, cette fois sans donner de démonstrations car elles sont trop compliquées, par un incroyable résultat sur les cycles des fonctions continues.

On considère une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Pour tout x entre 0 et 1, on considère la suite numérique suivante : $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots, f(f(\dots(x)\dots))$.

Si cette suite retombe sur le nombre x initial, on dit que l'on a un cycle. Le plus petit entier pour lequel cela se produit est l'« ordre » du cycle. Par exemple, la fonction $f(x) = 1 - x$ est telle que tout $x \neq 1/2$ engendre un cycle d'ordre 2 : en partant de $x = 1/3$, on a le cycle $1/3 \rightarrow 2/3 \rightarrow 1/3$.

On a la stupéfiante propriété suivante, découverte plusieurs fois, en particulier par Tien-Yien Li et James Yorke (« Period three implies chaos », *The American Mathematical Monthly*, vol. 82(10), pp. 985-992, 1975) : si f a un cycle d'ordre 3, alors elle a des cycles de tout ordre. Mais l'inverse est faux : pour tout $k \neq 3$, il existe des fonctions ayant un cycle d'ordre k et n'ayant pas de cycle d'ordre 3.

Le théorème a été rendu plus précis en 1964 par le mathématicien ukrainien Oleksandr Charkovski, qui a découvert une relation de nécessité très subtile et totalement inattendue entre les ordres des cycles. L'ordre 3 implique l'ordre 5 qui implique le 7, qui implique le 9, etc. Mais aussi,

$$\begin{array}{l} 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1).2^0 \rightarrow \dots \\ \rightarrow 3.2 \rightarrow 5.2 \rightarrow 7.2 \rightarrow 9.2 \rightarrow 11.2 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1).2^1 \rightarrow \dots \\ \rightarrow 3.2^2 \rightarrow 5.2^2 \rightarrow 7.2^2 \rightarrow 9.2^2 \rightarrow 11.2^2 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1).2^2 \rightarrow \dots \\ \rightarrow 3.2^3 \rightarrow 5.2^3 \rightarrow 7.2^3 \rightarrow 9.2^3 \rightarrow 11.2^3 \rightarrow \dots \rightarrow (2n+1).2^3 \rightarrow \dots \\ \vdots \\ \rightarrow \dots \rightarrow 2^n \rightarrow \dots \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \end{array}$$

le 6 implique le 10, qui implique le 14, etc. Ce système d'implication est défini par le tableau ci-dessus qu'on doit lire ligne par ligne, du haut vers le bas.

Ce tableau ne peut pas être simplifié, car il existe par exemple des fonctions ayant des cycles d'ordre 10 (donc 14, 18, etc.), mais aucun cycle d'ordre 6, 3, 5, 7, ... Pour des détails, voir Chung-Wu Ho et Charles Morris, « A graph-theoretic proof of Sharkovskii's theorem on the periodic points of continuous functions », *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 96(2), pp. 361-370, 1981 (<http://bit.ly/2haC9LH>) et l'article *Sharkovskii's theorem* sur Wikipedia.

Qui aurait imaginé que le seul fait d'être une fonction continue d'un intervalle dans lui-même cachait ce tableau mystérieux ? ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur
au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Les crocodiliens, divinités ou acteurs de séries B

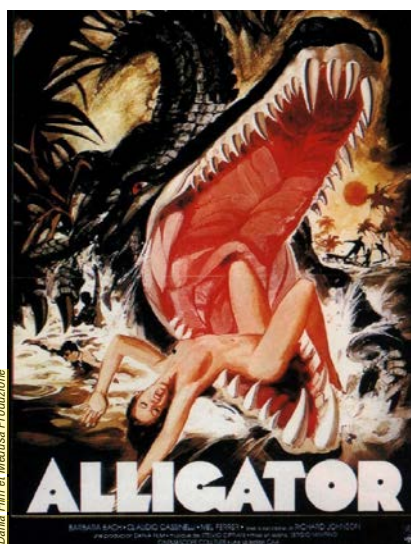
De l'Égypte antique jusqu'à Hollywood, les crocodiliens inspirent la peur par leur taille, leurs crocs et leur goût pour la chair humaine.

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ – Illustration : Marc BOULAY

Les bestiaires fantastiques sont souvent inspirés de la biodiversité réelle, actuelle ou fossile : dinosaures, tortues, primates, insectes, céphalopodes ou encore suidés, de nombreux groupes zoologiques sont repris et magnifiés dans les œuvres de fiction. Ces animaux nous inspirent parce qu'ils présentent des morphologies, des tailles ou encore des modes de vie extravagants selon les normes humaines. Parmi eux, les crocodiliens, tantôt dieux mythologiques, prédateurs sanguinaires, ennemis jurés du Capitaine Crochet ou supervillains, méritent une mention spéciale.

Les crocodiliens (ou *Crocodylia* dans le jargon des zoologistes) rassemblent aujourd'hui 23 espèces de reptiles ovipares plutôt amphibies, tropicaux et carnivores – bien que le gaviau du Gange, *Gavialis gangeticus* au long museau fin, soit piscivore. Le genre *Crocodylus* regroupe à lui seul 13 espèces et demeure le plus répandu dans la bande intertropicale, d'Amérique centrale jusqu'en Indonésie, en passant par l'Afrique avec le célèbre et dangereux crocodile du Nil (*Crocodylus niloticus*).

Dans l'Égypte antique, le dieu Sobek, représenté par un humain à tête de crocodile, était associé à l'eau et à la fertilité. Être dévoré par un crocodile vous élevait au rang d'« enfant chéri du dieu » et la présence de nombreux individus dans le Nil annonçait des crues favorables aux récoltes. Des temples ainsi qu'une célèbre



LE GRAND ALLIGATOR, sorti en 1979, illustre parfaitement le genre de film de série B où un crocodilien terrorise la population. Ce film s'inspire fortement des *Dents de la mer* mais aussi de *King Kong*, où le sacrifice d'une jeune femme pourrait apaiser le monstre.

grotte renfermant des momies de crocodiles sont dédiés à Sobek dans la ville de Médinet el-Fayoum, autrefois nommée Crocodilopolis par les Grecs. D'autres espèces de crocodiliens figurent également dans les mythes de différents peuples : ainsi, chez les Mayas, Zipacna, sorte de démon violent et arrogant, créateur des montagnes, est représenté par un grand caïman, tandis qu'une légende papoue raconte que Kabakmeli, crocodile divin, a créé le monde et ses habitants.

Le comportement parfois très agressif des crocodiliens et leur taille souvent impressionnante (avec un record de 6,17 mètres détenu par un crocodile marin, *C. porosus*, qui vivait en captivité aux Philippines jusqu'en 2011) inspirent les auteurs et réalisateurs qui en font alors de terribles monstres mangeurs d'hommes. Au cinéma, les crocodiles sont devenus en eau douce ce que les requins étaient en mer : une gueule affamée garnie de dents aiguisées surgies des profondeurs. Ainsi, après l'énorme succès des *Dents de la mer* (Steven Spielberg, 1975), de nombreuses productions ont tenté d'exploiter le filon avec des crocodiliens plus ou moins réalistes, comme avec *Les Dents de la mort* (Arch Nicholson, 1987) et de nombreux films de série B dont les titres en disent long sur la qualité des scénarios.

Outre une morphologie souvent exagérée avec une surenchère de crêtes, d'écailles et de dents débordant des mâchoires, le dénominateur commun des



SARCOSUCHUS IMPERATOR, un des plus grands crocodiliens, pouvait mesurer près de 12 mètres. La fonction de la bosse à l'extrémité de son museau reste une énigme.

« crocodiloïdes » de ces films reste souvent le gigantisme de l'espèce en question. Ainsi, le record du plus grand crocodilien fictif est détenu par *Crocosaur*, visible dans le très dispensable *Mega Shark vs. Crocosaurus* (Christopher Ray, 2010) : sa taille varie, selon les séquences du film, de 60 à plusieurs centaines de mètres ! Ces mensurations variables ne sont pas sans rappeler celles de *Godzilla* (Ishirō Honda, 1954), autre géant improbable dont la masse empêcherait tout déplacement au sol, par effondrement sous son propre poids.

Dans la réalité, les plus grands crocodiliens sont à rechercher dans les strates géologiques de notre planète. *Sarcosuchus imperator*, dont un squelette assez bien conservé est exposé à Paris dans la galerie de paléontologie du Muséum national d'histoire naturelle, fait environ 12 mètres pour une masse estimée à 8 tonnes. Ce crocodilien bien en chair (*sarco* signifie « chair » en grec), et dont les premiers fossiles ont été découverts dans les années 1940 par des géologues français au cœur du Sahara, vivait au Crétacé inférieur, il y a environ 112 millions d'années, en Afrique notamment. Grâce à sa taille imposante, il n'avait sans doute rien à craindre des dinosaures carnivores contemporains.

D'autres fossiles de *Sarcosuchus* parfois plus complets ont été découverts en 1997 et 2000 par le paléontologue américain Paul Sereno et son équipe : ceux-ci l'ont alors nommé « Supercroc » sans savoir que ce

sobriquet allait devenir plus tard le titre d'un autre film de série B (Scott Harper, 2007) mettant en scène un crocodile géant qui terrorise Los Angeles... Quoi qu'il en soit, *Sarcosuchus* est remarquable par son museau long et fin, qui présente à l'avant une sorte de bosse naturelle logeant les narines externes, et dont l'éventuelle fonction (olfaction, vocalisation ou autre) demeure très discutée. Cette étrange « bulle osseuse » évoque celle des gavials mâles, avec lesquels l'espèce fossile n'est cependant pas directement apparentée.

Un cuirassé en eaux douces

Un autre trait morphologique rencontré chez de nombreux crocodiliens, est la présence d'ostéodermes sur le corps, sortes d'écailles dermiques reposant sur des plaques osseuses et protégeant l'animal contre les agressions extérieures. Cette armure dermique recouvre le dos, et parfois le ventre de l'animal.

Les ostéodermes sont également connus chez des stégocéphales (grands amphibiens anciens) et de nombreux reptiles, qu'ils soient fossiles (phytosaures, aétosaures, certains dinosaures, etc.) ou actuels (certains lézards).

Des analyses de structure interne, effectuées en microtomographie à rayons X (c'est-à-dire à l'aide de puissants scanners X), ont montré que ces étonnantes écailles présentent des lignes d'arrêt de croissance qui enregistrent le rythme de vie et la croissance

de l'animal, de la même façon que les cernes marquent la croissance des troncs d'arbres. Ainsi, grâce à ses ostéodermes, on sait que *Sarcosuchus* mettait 50 à 60 ans pour atteindre sa taille adulte. En outre, ces écailles osseuses très ornementées sont aussi percées d'un réseau de canaux vasculaires qui leur confère, en plus de leur rôle protecteur, une fonction thermorégulatrice : les ostéodermes permettent aux crocodiliens de capter ou d'évacuer plus rapidement la chaleur. Les canaux sanguins qui irriguent les ostéodermes en profondeur apparaissent en surface sous la forme de petits trous.

Cette morphologie est bien respectée dans la récente représentation que le film *Suicide Squad* (David Ayer, 2016) fait de Killer Croc, un personnage de l'univers *DC Comics*. Waylon Jones, c'est son nom, est victime d'une grave maladie de peau qui recouvre dès son plus jeune âge son corps d'écailles et le transforme en homme-crocodile. Son apparence monstrueuse conduit à son exclusion de la société. Et il est amené à travailler dans un cirque. Cette biographie fictive évoque clairement celle, malheureusement bien réelle, d'un certain Joseph Merrick, au XIX^e siècle, plus connu sous le nom d'*Elephant Man*. Des vies bouleversantes qui font couler bien plus que des larmes de crocodile. ■

Jean-Sébastien STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. Roland LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay. Marc BOULAY est sculpteur numérique.