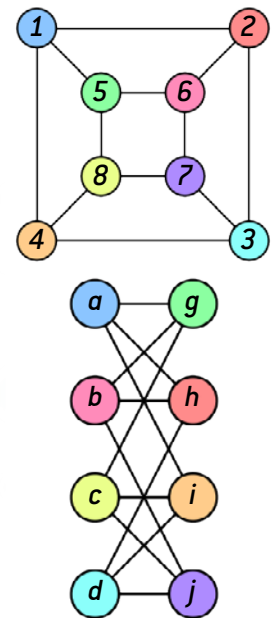
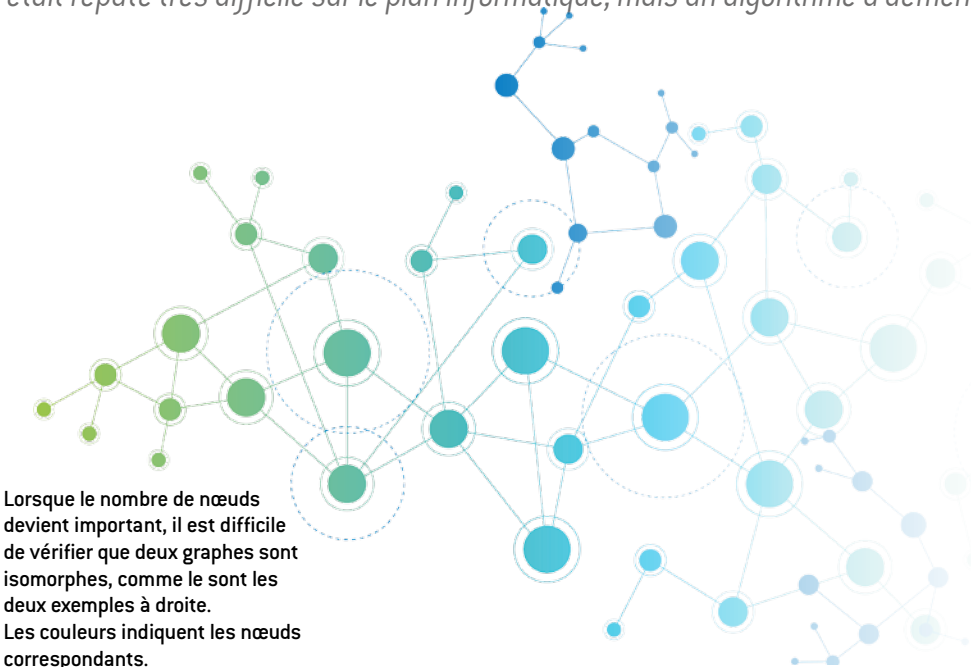


Actualités

Mathématiques

L'isomorphisme des graphes, moins complexe qu'on ne le pensait

Comment s'assurer que deux graphes d'aspect différent sont en fait les mêmes ? Ce problème était réputé très difficile sur le plan informatique, mais un algorithme a démenti cette idée.



En décembre 2015, László Babai, de l'université de Chicago, a annoncé un résultat qui promettait d'être un événement dans le domaine de l'informatique théorique et de la théorie de la complexité : le « problème d'isomorphisme des graphes » pourrait être résolu avec un algorithme « quasi polynomial » et serait donc moins complexe qu'on ne le pensait. Mais près d'un an après son annonce fracassante, le 4 janvier 2017, László Babai a signalé qu'un autre mathématicien, Harald Helfgott (université de Göttingen/CNRS-université Paris-Diderot), avait trouvé une faille dans son raisonnement... Quelques jours plus tard, László Babai est revenu à la charge avec un correctif. Peu après, lors d'un séminaire Bourbaki, Harald Helfgott a présenté

les résultats de László Babai et a confirmé qu'ils sont corrects.

Mais de quoi s'agit-il au juste ? Le problème relève de la théorie des graphes, domaine des mathématiques et de l'informatique qui a connu un formidable essor ces dernières décennies avec le développement des réseaux de télécommunications, et en particulier d'Internet. Un graphe est une représentation abstraite d'objets et de leurs relations par un ensemble de points ou « nœuds », reliés par des arêtes. La théorie des graphes fournit des outils puissants pour analyser les réseaux.

La question posée est la suivante. Si vous êtes confronté à deux graphes ayant le même nombre de nœuds, comment déterminer si ces graphes sont équivalents, c'est-à-dire si on peut faire correspondre

parfaitement les nœuds et arêtes d'un graphe à l'autre ? Si le nombre de nœuds est petit, un algorithme peut vérifier rapidement que les graphes sont équivalents en testant toutes les configurations. Mais avec cette méthode brutale, le temps nécessaire augmente exponentiellement avec le nombre de nœuds. Il devient très vite hors de portée pour de grands graphes. Peut-on faire mieux ? Ce problème d'isomorphisme des graphes résiste depuis plus de trente ans.

De façon générale, plus un problème est riche en paramètres, ici le nombre n de nœuds du graphe, plus le temps de calcul est long. Les mathématiciens répartissent les problèmes en deux classes de complexité. Les problèmes « faciles » ont un temps de résolution proportionnel à une puissance de n , par

exemple à n^2 ou n^3 , et peuvent être en général résolus avec un ordinateur. On parle de problème P (P pour « polynomial »). Les problèmes « difficiles », en revanche, demandent un temps de calcul exponentiel, par exemple de la forme 2^n , une fonction qui croît plus vite qu'un polynôme en n . On parle de problèmes NP, ou non polynomiaux (au sens strict, les problèmes NP sont ceux dont la résolution est non polynomiale, mais dont on peut vérifier une solution en un temps polynomial).

Pour en revenir à l'isomorphisme des graphes, ce problème était considéré comme un problème NP. Cependant, László Babai et Eugene Luks, un mathématicien de l'université de l'Oregon, avaient développé dans les années 1980 des méthodes théoriques performantes pour

Climatologie

Mieux cultiver pour stocker le carbone

Lancée lors de la COP 21, l'initiative « 4 pour 1 000 » (ou « 4 ‰ ») vise à séquestrer dans les sols chaque année une masse de carbone égale à celle que l'humanité émet dans l'atmosphère. Vincent Chaplot, qui s'est chargé du volet sud-africain d'une étude internationale préliminaire, nous explique comment cet objectif pourrait être atteint.

comparer des graphes. Et des algorithmes développés par ailleurs se montraient rapides quelle que soit la complexité des graphes comparés. Ces algorithmes de test d'isomorphisme de graphes sont utilisés par exemple en chimie pour vérifier que des molécules complexes sont les mêmes malgré des conformations différentes.

Les mathématiciens se demandaient donc si le problème était vraiment aussi difficile qu'on le pensait. Le résultat de László Babai confirme cette intuition. Il a développé un algorithme dont le temps de calcul augmenterait de façon « quasi polynomiale » (plus précisément : comme $\exp[(\log n)^a]$, où a est de l'ordre de quelques unités) en fonction de n . L'isomorphisme des graphes se rapproche donc de la classe des problèmes faciles.

La stratégie adoptée dans l'algorithme consiste à chercher des symétries dans les deux graphes à comparer et à les décomposer en éléments plus simples selon une procédure récursive. C'est justement dans cette procédure qu'Harald Helfgott a trouvé une faille. Une étape, la procédure « Split ou Johnson », se montrait problématique. Elle consiste à identifier à l'intérieur des deux graphes comparés un sous-graphe de type particulier, un « graphe de Johnson », ou à colorier les graphes d'une façon qui exhibe leurs symétries. Une partie de la procédure rendait l'algorithme instable. Grâce à l'analyse minutieuse de Harald Helfgott, László Babai a corrigé son algorithme tout en conservant sa conclusion : le problème d'isomorphisme des graphes est plus facile qu'on ne le pensait.

Sean Bailly

H. Helfgott, <https://arxiv.org/abs/1701.04372> ; L. Babai, <https://arxiv.org/abs/1512.03547>

Que signifie ce 4 ‰ ?

Vincent Chaplot : Ce programme part d'un calcul simple : nos émissions mondiales sont de 8,9 gigatonnes de carbone d'origine organique par an ; pour les équilibrer, il faudrait fixer autant de carbone dans le sol en plus des 2400 gigatonnes qui y sont déjà. Or $8,9/2400$ égale environ 0,0037, soit à peu près 4 ‰. Le programme portant ce nom vise à étudier les moyens de séquestrer un supplément de 0,4 % du carbone organique qui s'y trouve déjà.

Est-ce possible ?

V. C. : Techniquement, nous avons des solutions, mais la question centrale est que sur les 149 millions de kilomètres carrés de terres émergées, seulement 10 à 20 % sont aujourd'hui des surfaces agricoles où nous pouvons agir. À long terme, si nous nous en donnons les moyens, nous pourrions modifier la séquestration du carbone de 50 % des terres émergées, par exemple en créant des barrières vertes dans le désert, en plantant des forêts ou des prairies. À court terme, nous ne pouvons agir que sur les terres cultivées en y introduisant de nouvelles variétés.

C'est l'objectif du projet Carbofarm que vous portez ?

V. C. : Oui. Il s'agit de déterminer pour divers pays quelles sont les variétés cultivées des principales

céréales déjà sélectionnées qui séquestrent le plus de carbone dans le sol. Nous voulons aussi rechercher les systèmes de cultures rendant le plus de services non seulement aux hommes, mais aussi au sol.

Au sol ? Que voulez-vous dire ?

V. C. : Le carbone est le principal composant de la matière organique, qui nourrit les microbes du sol (lesquels représentent 80 % de la biomasse terrestre) ; le carbone y est associé à l'azote, au phosphore, aux



Vincent Chaplot, directeur de recherche à l'IRD.

métaux, etc. La matière organique joue aussi le rôle d'une éponge pour l'eau, qu'elle filtre comme une station d'épuration.

Dans le cas de l'Afrique du Sud, quelle est la situation des sols ?

V. C. : Seulement 10 % de la surface de ce pays est en surfaces agricoles. Le reste consiste en savanes peu fertiles. La décroissance des stocks de carbone dans le sol s'est en effet intensifiée avec l'arrivée

de l'agriculture moderne au cours des deux derniers siècles et de ses abus d'engrais azotés, qui accélèrent la consommation de la matière organique du sol ; et aussi parce qu'une mauvaise gestion des savanes les a livrées à un pâturage sédentaire suivi d'une dégradation du sol.

Comment redresser la situation ?

V. C. : Avec Carbofarm, nous travaillons déjà à sélectionner des variétés de maïs et de blés qui augmentent les intrants organiques dans le sol ; s'agissant des savanes, il s'agit d'imiter le comportement des herbivores sauvages qui, au lieu de stationner comme les vaches dans leurs enclos, suivent l'herbe, pâturant intensément mais temporairement en un lieu avant de l'abandonner pour longtemps, laissant à la végétation le temps de revenir.

Et en France ?

V. C. : Outre l'agriculture intensive qui exerce toujours la même pression excessive sur l'écosystème, nous avons l'occasion offerte par l'énorme déprise agricole. De plus en plus de terres redeviennent disponibles pour la forêt ou les pâtures. Encore faudrait-il s'en occuper en les rassemblant et en les gérant.

François Savatier

B. Minasny et al., *Geoderma*, vol. 292, pp. 59-86, 2017