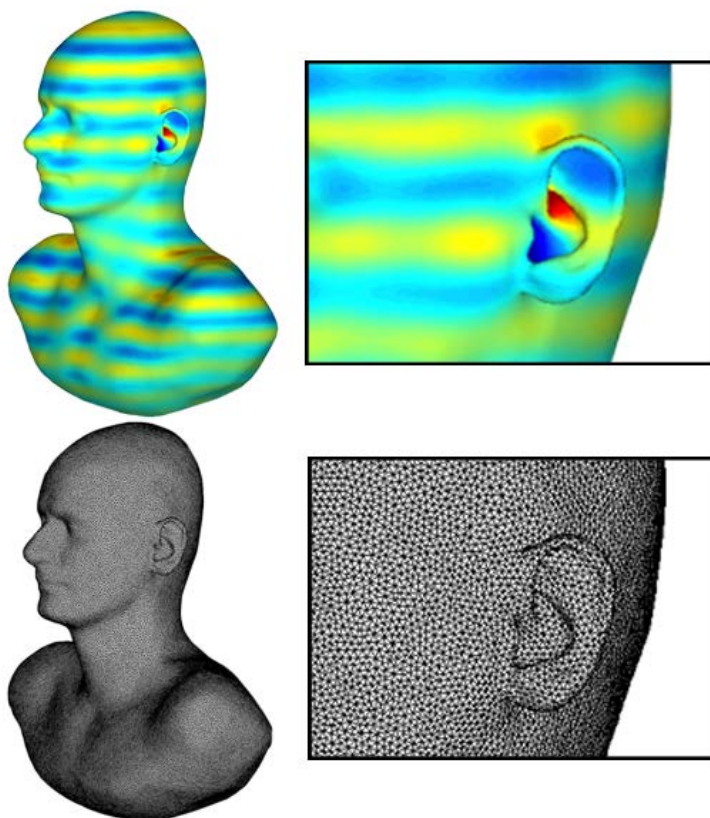




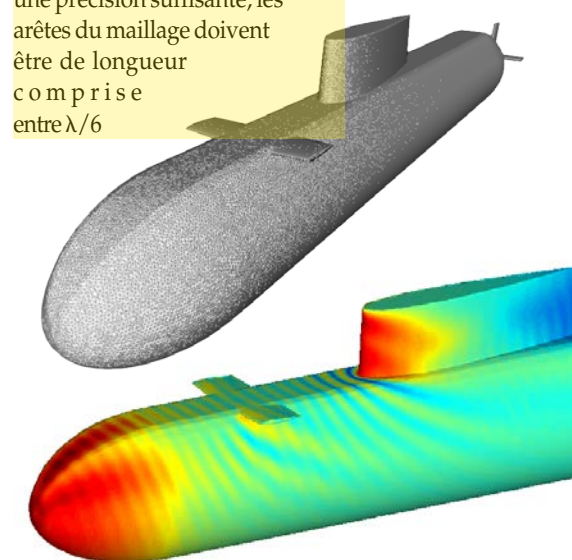
LA PRESSION ACOUSTIQUE à la surface d'un auditeur virtuel, due à une onde sonore de fréquence 8 kilohertz se propageant de haut en bas (les couleurs foncées représentent les pressions maximales en valeur absolue). On voit que le son est amplifié au niveau du tympan. C'est le résultat d'une résolution numérique des équations des ondes effectuée à l'aide du logiciel MyBEM, développé à l'École polytechnique par les auteurs. Le calcul exige une discrétisation fine, comme le montre le maillage (réalisation du projet SYMARE) du buste et de la tête.

définie par un maillage suffisamment fin et géométriquement adapté. Les nœuds du maillage sont les points où les valeurs (approchées) de la fonction-solution seront déterminées. On recherche ensuite ces valeurs en supposant que la fonction-solution approchée est la somme de fonctions simples et connues, choisies dans un ensemble approprié. Cette méthode, où l'on peut justifier mathématiquement l'existence et l'unicité de la solution approchée, est aujourd'hui un outil fondamental de calcul numérique dans le monde industriel.

Prenons l'exemple d'un problème d'acoustique en domaine fréquentiel, c'est-à-dire la propagation d'une onde sonore sinusoïdale, de fréquence bien définie (équation de Helmholtz, voir l'encadré page 45). La méthode des éléments finis consistera ici à définir un maillage du volume où se propage l'onde sonore. Ce maillage servira de base au calcul d'une solution approchée représentant la pression acoustique.

À cause de la nature oscillante de la solution recherchée, pour atteindre une précision suffisante, les arêtes du maillage doivent être de longueur comprise entre $\lambda/6$

© M. Aussal et F. Alouges



Toutefois, afin que la résolution numérique soit précise et fiable, il faut connaître les limites des méthodes et algorithmes utilisés. Ce qui nécessite une compréhension profonde des modèles mathématiques associés (la propagation des ondes sonores), ainsi que des phénomènes sous-jacents (la diffraction). Il est généralement impossible de trouver des solutions « analytiques » (des expressions mathématiques compactes) à l'équation de propagation des ondes. D'où la nécessité de la résoudre numériquement, par une méthode adaptée. Celle-ci, mise en œuvre dans un logiciel et exécutée par un ordinateur, fournira une approximation de la solution théorique exacte. Cette démarche est caractéristique des mathématiques appliquées, dans un grand nombre de domaines scientifiques et techniques.

La simulation numérique de la propagation d'ondes est un sujet déjà bien documenté puisqu'il a de nombreuses applications. Acoustique architecturale, conception de véhicules militaires furtifs, influence de champs d'éoliennes sur les radars, étude de la pollution sonore, etc. : la propagation d'ondes sonores ou électromagnétiques intervient dans d'innombrables questions, et la simulation numérique fournit souvent des informations utiles tout en évitant le

recours à des expériences coûteuses ou difficilement réalisables.

Quelles sont les méthodes utilisées pour résoudre numériquement l'équation qui décrit la propagation des ondes ? Cette équation est une « équation aux dérivées partielles », c'est-à-dire une équation reliant la fonction à déterminer, qui dépend de plusieurs variables, à ses dérivées.

Construire un maillage adapté de l'espace

Depuis les années 1950, la méthode dite des éléments finis fournit un cadre mathématiquement rigoureux pour le calcul approché des solutions de ce type d'équations. En pratique, l'idée générale est d'abord de découper l'espace en petits morceaux : on discrétise le domaine où l'équation est

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES développées pour la synthèse de son 3D s'appliquent à de nombreux autres domaines, par exemple l'étude de la détectabilité d'un sous-marin recherché à l'aide d'un sonar. Le résultat d'un calcul de la pression acoustique sur la surface du sous-marin, pour une onde sonar venant de l'avant, est représenté ici, avec le maillage (réalisé par ESI Group) qui a été utilisé.

et $\lambda/12$, où λ est la longueur d'onde considérée. Il s'ensuit que pour des fréquences élevées (courtes longueurs d'onde), le nombre de sommets du maillage se révèle souvent prohibitif. Ainsi, le maillage d'une pièce mesurant $3 \times 4 \times 2,5$ mètres avec des mailles cubiques de 0,5 centimètre de côté comporterait environ 240 millions de sommets, ce qui donnerait lieu à un système d'équations à 240 millions d'inconnues !

Il est possible de réduire l'ampleur de la tâche. En effet, des manipulations mathématiques permettent de donner à l'équation des ondes une formulation en termes d'intégrales où la fonction inconnue n'intervient plus que par les valeurs qu'elle prend sur la frontière du domaine de propagation (voir l'encadré page 45). Ainsi, pour une onde sonore se propageant dans un milieu ouvert où se trouve l'auditeur, seules interviennent dans l'équation intégrale les valeurs prises par la fonction inconnue sur la surface de l'auditeur.

Un calcul ramené à une surface finie

La résolution numérique de cette équation intégrale surfacique nécessite une écriture mathématique et une algorithmique sous-jacente plus complexes que les méthodes volumiques. Mais l'avantage est que seule la surface de l'objet soumis aux ondes doit être discrétisée, et non tout le volume de propagation. Dans le cas de la pièce de quelques mètres envisagée plus haut où est placé l'auditeur, on réduit ainsi le nombre d'inconnues de 240 millions à seulement quelques millions. Et de façon plus générale, comme la formulation intégrale ramène un problème posé dans tout l'espace (infini) à un problème posé sur une surface finie, sa résolution numérique est

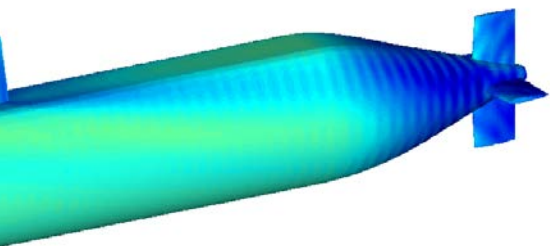
bien plus précise que celle de l'équation aux dérivées partielles.

Le développement de méthodes performantes pour résoudre numériquement ces équations intégrales a démarré un peu avant les années 2000 et est un champ de recherche encore très actif. Citons les noms de trois méthodes rapides adaptées aux problèmes de propagation d'ondes et aujourd'hui utilisées dans la recherche et l'industrie : les méthodes multipolaires rapides, inventées à l'université Yale par Leslie Greengard et Vladimir Rokhlin en 1988, la méthode des matrices hiérarchiques, inventée en 1999 par Wolfgang Hackbusch, de l'institut Max-Planck à Leipzig, et la *sparse cardinal sine decomposition*, que nous avons conçue en 2013.

Toutes ces méthodes permettent de réduire très sensiblement le temps de calcul et la mémoire nécessaires à la résolution de formulations intégrales pour la propagation des ondes, ce qui rend aujourd'hui le calcul numérique des HRTF accessible sur un ordinateur usuel. Typiquement, il faut compter une dizaine d'heures pour calculer tous les filtres HRTF avec une précision suffisante pour les applications.

Le calcul numérique des HRTF ouvre la voie à une meilleure compréhension du lien entre ce que perçoit un auditeur et ses détails morphologiques, en particulier les formes de ses oreilles et de sa tête. Il est facile, en utilisant le modèle numérique, de déformer les oreilles ou la tête d'un sujet virtuel, puis de construire une base de données exhaustive des formes possibles. On pourra alors proposer une famille de HRTF adaptées à chacun. Plus généralement, ces approches numériques aideront à améliorer la spatialisation sonore des casques de réalité virtuelle, mais aussi, pourquoi pas, les prothèses auditives ou les dispositifs de guidage de personnes malvoyantes.

Enfin, de l'autre côté du spectre, la généralité de l'outil mathématique développé le rend applicable à de nombreux autres problèmes de propagation d'ondes. Ainsi, le même logiciel et les mêmes algorithmes de calcul de HRTF permettent de simuler efficacement la propagation d'ondes sonores dans un théâtre, des ondes émises par un sonar en milieu aquatique (voir la figure ci-contre), des ondes radar (électromagnétiques) auxquelles cherche à échapper un avion furtif, etc. Un vaste champ d'applications ! ■



MyBino, un logiciel gratuit pour son 3D

L'équipe X-Audio du Centre de mathématiques appliquées de l'École polytechnique a développé un logiciel de rendu binaural gratuit, à destination des professionnels du son et du grand public. Issu d'une collaboration avec les ingénieurs du son du Conservatoire national de musique et danse de Paris (CNSMDP), cet outil permet de mixer et d'écouter des enregistrements sonores contenant jusqu'à 48 canaux avec un simple casque audio. Il a été conçu pour maximiser la sensation d'externalisation des sons, tout en réduisant le plus possible les artefacts de traitement audibles (www.cmap.polytechnique.fr/xaudio/mybino).

BIBLIOGRAPHIE

F. Alouges et M. Aussal, The sparse cardinal sine decomposition and its application for fast numerical convolution, *Numerical Algorithms*, vol. 70(2), pp. 427-448, 2015.

M. Aussal, Méthodes numériques pour la spatialisation sonore, de la simulation à la synthèse binaurale, thèse de doctorat, École polytechnique, 2014.

J.-C. Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representations for Harmonic Problems*, Springer, 2001.

D. R. Begault et L. J. Trejo, 3-D sound for virtual reality and multimedia, rapport NASA/TM-2000-209606, 2000.

J. Blauert, *Spatial Hearing: The Psychophysics of Human Sound Localization*, MIT Press, 1997.