

La grande conjecture de Harvey Friedman

Harvey Friedman est un mathématicien de l'université d'État de l'Ohio, aux États-Unis. Aujourd'hui à la retraite, il conserve une activité productive hors du commun. Il est mentionné dans le *Livre Guinness des records* comme ayant été, à 18 ans, le plus jeune enseignant de tous les temps à donner un cours à l'université Stanford.

S'intéressant aux fondements des mathématiques, il recherche des énoncés les plus concrets possible dont la preuve exige l'emploi d'axiomes stipulant l'existence de très grands ensembles infinis (axiomes de grands cardinaux). Il réussit assez bien, mais les énoncés de ce type qu'il découvre restent abstraits et jamais aussi simples que le théorème de Fermat. Ce qu'il trouve confirme cependant le bien-

fondé des travaux de Colin McLarty visant à prouver que le théorème de Fermat n'exige pas d'axiomes forts sur l'infini.

Harvey Friedman semble penser que la distinction entre « concret et assez simple » et « très simple » dépend de la nécessité d'utiliser des axiomes affirmant l'existence de grands ensembles. Dans le cas du théorème de Fermat, il conjecture qu'il doit pouvoir se démontrer

en utilisant des systèmes d'axiomes très faibles n'utilisant pas l'infini. Il a énoncé ce qu'on nomme aujourd'hui « la grande conjecture de Friedman », selon laquelle tous les théorèmes d'arithmétique qui intéressent spontanément les mathématiciens (donc à l'exclusion des résultats de logique, ou des énoncés construits artificiellement afin qu'ils exigent des axiomes forts) sont démontrables en utilisant un système où l'infini ne joue aucun rôle direct. S'il a raison, il faudra comprendre pourquoi ce qui intéresse les mathématiciens reste dans un secteur limité de complexité et définir avec précision ce secteur. Harvey Friedman exprime son



HARVEY FRIEDMAN

point de vue ainsi : « Le défi le plus intéressant concernant les fondements des mathématiques est de trouver des énoncés portant sur les entiers et dont la démonstration dépende de manière incontournable des univers [de Grothendieck]. »

(ce sont des objets géométriques : par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = 1$ définit un cercle), et on raisonne globalement sur ces structures.

Malheureusement, les travaux de Grothendieck sortent du cadre usuel de la théorie des ensembles telle que ZFC la formalise, car les outils que ce mathématicien de génie a introduits et manipulés sont d'une abstraction extrême qui exige par exemple qu'on parle sans contrainte d'objets tels que la collection de tous les groupes.

Un axiome aujourd'hui bien étudié sur lequel s'appuie Grothendieck affirme l'existence de ce qu'il appelle des « univers » (voir l'encadré page 81). Cet axiome lui permet de manipuler dans ses démonstrations non seulement les entiers eux-mêmes, mais aussi les ensembles d'entiers, et les ensembles de tels ensembles d'entiers, et toute une hiérarchie de structures d'une abstraction inhabituelle en mathématiques. Cette théorie des catégories dont Grothendieck fait un usage systématique pour ses raisonnements ne se trouve à l'aise qu'en postulant ces « univers » dont les logiciens savent depuis longtemps qu'on ne peut en démontrer l'existence dans le cadre de ZFC. En clair, puisque Andrew Wiles

s'appuie sur ces résultats postulant l'existence des cardinaux fortement inaccessibles, sa preuve n'a de sens que dans une théorie très forte qui semble être INAC.

« Tout le monde voit que c'est là une méthode précipitée et grossière », commente Colin McLarty, de l'université de Cleveland. Ce dernier est professeur de philosophie, mais très compétent en mathématiques et en logique : il a régulièrement publié dans les meilleures revues de ces disciplines et il est membre du « Grothendieck Circle » qui travaille à rendre accessible sur Internet les travaux de Grothendieck.

Prouver avec moins

Il s'est ainsi attaqué à la question : peut-on faire baisser le niveau des hypothèses implicites de la démonstration de Wiles ? Dit autrement, peut-on la faire reposer sur des formalismes plus faibles que INAC, ou même que ZFC ?

Colin McLarty précise que « Les grands cardinaux en tant que tels n'étaient ni intéressants ni problématiques pour Grothendieck [...]. Pour lui, ils n'étaient que des moyens

légitimes pour accéder à quelque chose d'autre. Il voulait organiser l'arithmétique et ses calculs dans un monde conceptuel géométrique. Il a trouvé un moyen de le faire avec la cohomologie [une méthode algébrique abstraite] et l'a utilisée pour concevoir des outils de calcul qui, auparavant, avaient échappé aux meilleurs mathématiciens tentant de résoudre les conjectures de Weil [démontrées en 1974 par Pierre Deligne en utilisant les outils créés par Grothendieck]. Il a ainsi posé les bases de la géométrie algébrique moderne. [...] Sa cohomologie s'appuie sur les univers, mais des fondements plus faibles devraient suffire même si y recourir entraîne la perte d'une certaine élégance conceptuelle. [...] Il n'y a aucune absurdité à considérer les univers inutiles en principe, et utiles en pratique. »

Colin McLarty expose une méthode pour construire une preuve du grand théorème de Fermat entièrement dans ZFC. Pour l'essentiel, elle consiste à utiliser des théories des ensembles prudentes, comme celle proposée par John von Neumann, Paul Bernays et Kurt Gödel (notée NBG). Ces théories autorisent la manipulation de gros

ensembles en ne les assimilant pas à de simples ensembles : il y a donc deux types de collections différentes. Bien qu'un peu compliquées et parfois jugées artificielles, ces théories permettent, dans un système équivalent en force à ZFC, de faire ce que les univers de Grothendieck font. On a donc, moyennant quelques complications, et sans prendre les risques liés à INAC, un monde mathématique autorisant la démonstration du théorème de Fermat.

Une autre méthode proposée récemment par Colin McLarty, fondée sur l'étude de ce qui est vraiment indispensable de ZFC pour disposer des théories arithmétiques de Grothendieck, permet en théorie de formaliser la preuve dans un système d'une force comprise entre celle de PEANO et celle de ZFC. Mais ce n'est pas encore pleinement satisfaisant. Une autre approche, esquissée par Angus Macintyre, permettrait de démontrer le théorème de Fermat dans PEANO, soit mieux que ce que propose McLarty. Son idée est que les objets du monde continu utilisés dans la démonstration peuvent être obtenus comme des limites d'objets définissables à partir des entiers. Un nombre réel, par exemple, est la limite des nombres décimaux correspondant à ses chiffres pris progressivement : ainsi, π est la limite de $\{3; 3,1; 3,14; 3,141; \dots\}$.

En procédant systématiquement par cette méthode, on doit pouvoir ramener la preuve d'Andrew Wiles et toutes celles antérieures dont il a besoin dans son travail à des mathématiques entièrement situées dans PEANO. Il ne suffit pas de le dire, il faut le faire et ce très soigneusement. Angus Macintyre a proposé quelques détails dans un texte d'une dizaine de pages sur la façon de mettre en œuvre sa méthode, et il semble avoir convaincu plusieurs spécialistes que ces réductions fonctionnent. Mais le travail définitif reste à faire pour être certain qu'aucun obstacle inattendu ne s'interpose.

On le voit, on n'a pas fini de travailler sur la démonstration d'Andrew Wiles et sur les théories de Grothendieck.

Notons pour finir qu'il existe des systèmes plus faibles que PEANO, en particulier le système EFA (pour *Exponential Functional Arithmetics*), où l'on n'autorise les raisonnements par récurrence que pour une classe

limitée de formules simples. Le système EFA semble d'ailleurs la vraie limite pour démontrer le théorème de Fermat.

On sait en effet qu'en allant plus bas, les systèmes qu'on définit naturellement pour l'arithmétique ne permettent pas tous de démontrer ce théorème. Une autre raison pour s'intéresser à EFA est une conjecture proposée par un mathématicien respecté, selon laquelle EFA suffirait pour l'essentiel des résultats arithmétiques vraiment intéressants. La « grande conjecture de Harvey Friedman » affirme ainsi que tous les résultats d'arithmétique dont on trouve la démonstration dans la revue *Annals of Mathematics* (où a été publiée la preuve d'Andrew Wiles) sont démontrables dans EFA.

EFA, système ultime ?

La formulation de cette conjecture est un peu étrange, puisqu'elle n'envisage qu'une classe d'énoncés définie par les publications d'une revue, ce qui n'est pas très mathématique et variera dans le temps quand de nouveaux articles seront publiés. L'idée est cependant claire : on sait, en utilisant des méthodes logiques ou de la théorie de Ramsey, construire des formules d'arithmétique non démontrables dans EFA et même dans PEANO, mais démontrables dans des systèmes plus forts. Pas question donc d'affirmer que tout résultat arithmétique se démontre dans EFA. Cependant, la revue *Annals of Mathematics*, qui est une revue de mathématiques pures, ne publie pas ce type de résultats jugés artificiels. Ce qu'elle publie est limité au cœur des mathématiques. Et selon la grande conjecture de Harvey Friedman, cela n'exige jamais plus que EFA.

Avant de savoir si Harvey Friedman a raison et comment caractériser précisément les choix de la revue *Annals of Mathematics*, il faudra mieux comprendre les hypothèses implicites des théories de Grothendieck, les démonstrations comme celles d'Andrew Wiles et la mise en forme des réductions esquissées aujourd'hui. Ce chemin sera riche en leçons et utile pour produire des preuves vérifiables par ordinateur de ce domaine mathématique qu'à l'heure actuelle on ne sait pas formaliser explicitement.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

Dernier ouvrage paru :
Mathématiques et mystères,
une intrigante sélection de ses
chroniques parues dans
Pour la Science (Belin, 2016).

BIBLIOGRAPHIE

P. Glivický et V. Kala, *Fermat's Last Theorem and Catalan's conjecture in weak exponential arithmetics*, prépublication arXiv:1602.03580, 2016.

W. Hesselink, *Computer verification of Wiles' proof of Fermat's Last Theorem*, www.cs.rug.nl/~fwim/fermat/wilesEnglish.html, 2016.

C. McLarty, *The large structures of Grothendieck founded on finite order arithmetic*, prépublication arXiv:1102.1773, 2014.

A. Macintyre, *The impact of Gödel's incompleteness theorems on mathematics*, dans *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics*, pp. 3-25, Cambridge Univ. Press, 2011.

J.-P. Delahaye, *Du rêve à la réalité des preuves*, *Pour la Science* n° 402, pp. 90-95, avril 2011.



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr