

ensembles en ne les assimilant pas à de simples ensembles : il y a donc deux types de collections différentes. Bien qu'un peu compliquées et parfois jugées artificielles, ces théories permettent, dans un système équivalent en force à ZFC, de faire ce que les univers de Grothendieck font. On a donc, moyennant quelques complications, et sans prendre les risques liés à INAC, un monde mathématique autorisant la démonstration du théorème de Fermat.

Une autre méthode proposée récemment par Colin McLarty, fondée sur l'étude de ce qui est vraiment indispensable de ZFC pour disposer des théories arithmétiques de Grothendieck, permet en théorie de formaliser la preuve dans un système d'une force comprise entre celle de PEANO et celle de ZFC. Mais ce n'est pas encore pleinement satisfaisant. Une autre approche, esquissée par Angus Macintyre, permettrait de démontrer le théorème de Fermat dans PEANO, soit mieux que ce que propose McLarty. Son idée est que les objets du monde continu utilisés dans la démonstration peuvent être obtenus comme des limites d'objets définissables à partir des entiers. Un nombre réel, par exemple, est la limite des nombres décimaux correspondant à ses chiffres pris progressivement : ainsi, π est la limite de $\{3; 3,1; 3,14; 3,141; \dots\}$.

En procédant systématiquement par cette méthode, on doit pouvoir ramener la preuve d'Andrew Wiles et toutes celles antérieures dont il a besoin dans son travail à des mathématiques entièrement situées dans PEANO. Il ne suffit pas de le dire, il faut le faire et ce très soigneusement. Angus Macintyre a proposé quelques détails dans un texte d'une dizaine de pages sur la façon de mettre en œuvre sa méthode, et il semble avoir convaincu plusieurs spécialistes que ces réductions fonctionnent. Mais le travail définitif reste à faire pour être certain qu'aucun obstacle inattendu ne s'interpose.

On le voit, on n'a pas fini de travailler sur la démonstration d'Andrew Wiles et sur les théories de Grothendieck.

Notons pour finir qu'il existe des systèmes plus faibles que PEANO, en particulier le système EFA (pour *Exponential Functional Arithmetics*), où l'on n'autorise les raisonnements par récurrence que pour une classe

limitée de formules simples. Le système EFA semble d'ailleurs la vraie limite pour démontrer le théorème de Fermat.

On sait en effet qu'en allant plus bas, les systèmes qu'on définit naturellement pour l'arithmétique ne permettent pas tous de démontrer ce théorème. Une autre raison pour s'intéresser à EFA est une conjecture proposée par un mathématicien respecté, selon laquelle EFA suffirait pour l'essentiel des résultats arithmétiques vraiment intéressants. La « grande conjecture de Harvey Friedman » affirme ainsi que tous les résultats d'arithmétique dont on trouve la démonstration dans la revue *Annals of Mathematics* (où a été publiée la preuve d'Andrew Wiles) sont démontrables dans EFA.

EFA, système ultime ?

La formulation de cette conjecture est un peu étrange, puisqu'elle n'envisage qu'une classe d'énoncés définie par les publications d'une revue, ce qui n'est pas très mathématique et variera dans le temps quand de nouveaux articles seront publiés. L'idée est cependant claire : on sait, en utilisant des méthodes logiques ou de la théorie de Ramsey, construire des formules d'arithmétique non démontrables dans EFA et même dans PEANO, mais démontrables dans des systèmes plus forts. Pas question donc d'affirmer que tout résultat arithmétique se démontre dans EFA. Cependant, la revue *Annals of Mathematics*, qui est une revue de mathématiques pures, ne publie pas ce type de résultats jugés artificiels. Ce qu'elle publie est limité au cœur des mathématiques. Et selon la grande conjecture de Harvey Friedman, cela n'exige jamais plus que EFA.

Avant de savoir si Harvey Friedman a raison et comment caractériser précisément les choix de la revue *Annals of Mathematics*, il faudra mieux comprendre les hypothèses implicites des théories de Grothendieck, les démonstrations comme celles d'Andrew Wiles et la mise en forme des réductions esquissées aujourd'hui. Ce chemin sera riche en leçons et utile pour produire des preuves vérifiables par ordinateur de ce domaine mathématique qu'à l'heure actuelle on ne sait pas formaliser explicitement.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'université
de Lille
et chercheur

au Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille (CRISTAL).

Dernier ouvrage paru :
Mathématiques et mystères,
une intrigante sélection de ses
chroniques parues dans
Pour la Science (Belin, 2016).

BIBLIOGRAPHIE

P. Glivický et V. Kala, *Fermat's Last Theorem and Catalan's conjecture in weak exponential arithmetics*, prépublication arXiv:1602.03580, 2016.

W. Hesselink, *Computer verification of Wiles' proof of Fermat's Last Theorem*, www.cs.rug.nl/~fwim/fermat/wilesEnglish.html, 2016.

C. McLarty, *The large structures of Grothendieck founded on finite order arithmetic*, prépublication arXiv:1102.1773, 2014.

A. Macintyre, *The impact of Gödel's incompleteness theorems on mathematics*, dans *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics*, pp. 3-25, Cambridge Univ. Press, 2011.

J.-P. Delahaye, *Du rêve à la réalité des preuves*, *Pour la Science* n° 402, pp. 90-95, avril 2011.



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

L'imaginaire des profondeurs

Les lunes de Jupiter hébergeant de l'eau liquide et les lointaines exoplanètes sont autant de lieux mystérieux à découvrir. Tout comme les fonds des océans terrestres qui restent largement inexplorés.

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ. Illustration : Marc BOULAY

Sans l'eau, la vie telle que nous la connaissons ne serait peut-être pas apparue il y a environ 3,8 milliards d'années. En effet, cet élément joue un rôle fondamental dans de nombreux processus biochimiques. En est-il de même sur d'autres planètes ? Nous sommes encore loin de pouvoir répondre à cette question, mais l'eau cache d'autres énigmes et des mondes mystérieux... très proches de nous à l'échelle de l'Univers.

Car si l'eau recouvre près de 71 % de la surface de la Terre, les profondeurs des océans terrestres demeurent moins connues que la surface de la Lune ou de Mars. Nous avons donc tout autant à découvrir et explorer directement sous nos pieds que sur des corps célestes éloignés.

En attendant de cartographier plus précisément les fonds marins, l'inconnu qui nimbe ces régions constitue autant de prétextes à l'imaginaire. Un imaginaire qui rejoint parfois la réalité. Chaque plongée abyssale ramène son lot de nouvelles espèces extraordinaires et inconnues, de hideux poissons-lanternes, d'amusantes pieuvres dumbo ou d'étranges vers fixés à des cheminées volcaniques. Ce bestiaire extrémophile constitue un véritable « monde perdu » sous-marin digne des romans d'Arthur Conan Doyle ou de Jules Verne.

Peut-être les aventures de James Cameron nous inciteront-elles à explorer les fonds marins. Le célèbre réalisateur est le troisième homme au monde à avoir atteint le site Challenger Deep de la fosse des Mariannes, au

Pour réaliser son exploit, James Cameron s'est probablement imaginé dans la peau de Bud, personnage de son film *Abyss* (1989) qui rencontre à très grande profondeur des extraterrestres aquatiques, pacifiques et capables de manipuler l'eau liquide. Notons au passage que la morphologie de ces extraterrestres bioluminescents est inspirée de celle des béroés, organismes marins bien réels et cousins des méduses.

Une autre région terrestre en cours d'exploration est celle des lacs subglaciaires de l'Antarctique, tel le lac Vostok (situé à 4 000 mètres sous la glace), atteints par des forages où l'on a trouvé de la vie sous la forme de bactéries extrêmophiles. Ces lacs évoquent les océans d'eau liquide présents sur d'autres corps célestes gelés, comme Europe, une lune de Jupiter. Ces océans, coincés entre une épaisse couche de glace et un socle rocheux, hébergent peut-être aussi la vie.

Peut-on imaginer une planète dont la partie interne serait remplie d'eau liquide et dépourvue de noyau rocheux ? Ces océans internes hypothétiques posent d'intéressantes questions de planétologie et de géologie : pour rester au centre de la planète, cette masse d'eau devrait être plus dense que la croûte continentale. Certes, nous avons l'impression de flotter sur la mer Morte

Les fonds des océans terrestres sont

**moins connus
que la surface
de la Lune ou
de Mars**

large du Japon : en 2012, il est descendu seul, dans son bathyscaphe, à 10 898 mètres, à deux doigts du record mondial (10 916 mètres) détenu depuis 1960 par le Suisse Jacques Piccard et l'Américain Don Walsh.



LES TRÉSORS DES FONDS ABYSSAUX restent encore à découvrir. Il en est ainsi de la faune bioluminescente, des organismes capables de produire de la lumière grâce à des processus chimiques.

grâce à sa forte salinité [275 grammes par litre, dix fois plus que la moyenne]. Mais même un océan hypersalé ne peut atteindre une densité suffisante pour que des îlots de terre et de roches y flottent.

Certaines fictions imaginent de tels mondes, comme la cité Otoh Gunga sur la planète Naboo dans *Star Wars I* (George Lucas, 1999). Mais il est plus probable que cette ville se situe dans un karst géant (un vaste plateau calcaire très érodé et creusé de grottes) rempli d'eau.

Quoi qu'il en soit, ces mondes imaginaires sont souvent empruntés à l'idée fausse de la « Terre creuse », selon laquelle tout un monde se cacherait sous nos pieds.

Les œuvres de science-fiction, des *blockbusters* hollywoodiens aux grands classiques de la littérature, regorgent de mondes aquatiques : *Solaris* et son océan pensant du fameux roman de Stanislas Lem (1961), la planète Miller dans *Interstellar* (Christopher Nolan, 2014), Aquablue ou Aldebaran des bandes dessinées éponymes, ou encore Kronos dans *Star Trek* sont autant de « planètes océans ». Certains nous renvoient l'image d'une Terre malade, en proie à un réchauffement climatique global. C'est le cas de *Waterworld* (Kevin Reynolds, 1995), sorte de *Mad Max* aquatique censé se dérouler sur une Terre dévastée et quasi submergée par la montée généralisée des eaux.

Les mers et les océans, qu'ils soient fictifs ou réels, sont aussi les lieux privilégiés de monstres géants. Sur Terre, le gigantisme

peut être favorisé par des processus d'isolement, comme ce fut le cas de petits rongeurs devenus géants sur les îles Gargano (en Italie) il y a 5 à 6 millions d'années environ (on parle alors de gigantisme insulaire).

Dans le milieu aquatique, c'est plutôt la poussée d'Archimède qui autorise aux animaux d'atteindre des tailles et des masses considérables : le record actuel est détenu par la baleine bleue (*Balaenoptera musculus*) dont le plus grand spécimen jamais mesuré était une femelle de près de 30 mètres et 177 tonnes ! Sur la terre ferme, la gravité impose sa loi : la masse maximale qu'un vertébré terrestre pourrait atteindre est estimée à environ 130 tonnes – le plus grand dinosaure, connu par une seule vertèbre, aurait pesé environ 122 tonnes d'après les reconstitutions.

Celui qui hantait les ténèbres

Dans l'eau, les auteurs de fictions s'en donnent à cœur joie. Béhémoth, Godzilla, Léviathan ou encore Cthulhu... Ce bestiaire de monstres géants, visqueux, tentaculaires ou protéiformes ne reflète rien de moins que nos peurs et nos fantasmes.

Autrefois, combien de navigateurs pensaient avoir échappé au « serpent de mer » alors qu'ils croisaient un régalec (*Regalecus glesne*), le plus long poisson osseux du monde [5 mètres en moyenne]. Idem pour les siréniens (dugongs et lamantins), pai-

sibles mammifères aquatiques à peau claire et interprétés autrefois comme des sirènes. Les profondeurs océaniques sont donc aussi des lieux de spéculations face auxquelles il convient d'être sceptique tout en restant ouvert : le kraken, espèce cryptozoologique par excellence, n'est-il pas aujourd'hui nommé *Architeuthis* (et *Mesonychoteuthis* pour le genre austral) par les biologistes marins ?

Outre leur anatomie ou leur taille, ces monstres imaginaires ou réels sont intéressants parce qu'ils occupent aussi une place importante dans une chaîne alimentaire donnée (les écologues parlent de « réseau écotrophique ») : dans *Star Wars*, le submersible des Jedis est happé par l'Opee Sea Killer, poisson-crabe géant qui se fait lui-même croquer par le Sando, titanesque dragon des mers.

Mais oublions un instant notre monde carboné et son modèle géocentré stipulant que « l'eau, c'est la vie » : n'y a-t-il pas un autre solvant qui pourrait être aussi vital pour d'autres formes extraterrestres ? Isaac Asimov, biochimiste et auteur de science-fiction, imaginait une vie dans de glacials océans de méthane ou d'hydrogène. Certains exobiologistes misent sur l'ammoniac ou le fluorure d'hydrogène : autant de biochimies hypothétiques qui augurent peut-être des océans de découvertes ! ■

Jean-Sébastien STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. Roland LEHOUcq est astrophysicien au CEA, à Saclay. Marc BOULAY est sculpteur numérique.