

LES DÉCOUPAGES RADIAUX D'UN DISQUE

1

A. DÉCOUPAGES SIMPLES

En traçant une courbe fermée constituée d'un arc de cercle et deux lignes identiques, en la plaçant convenablement entre le centre d'un disque et le bord (1), puis en la dupliquant n fois en tournant à chaque fois de $2\pi/n$, on obtient des découpages du disque en parts superposables (2). On montre ici deux exemples d'un tel découpage

radial, l'un avec un secteur (3), l'autre avec une spirale (4).

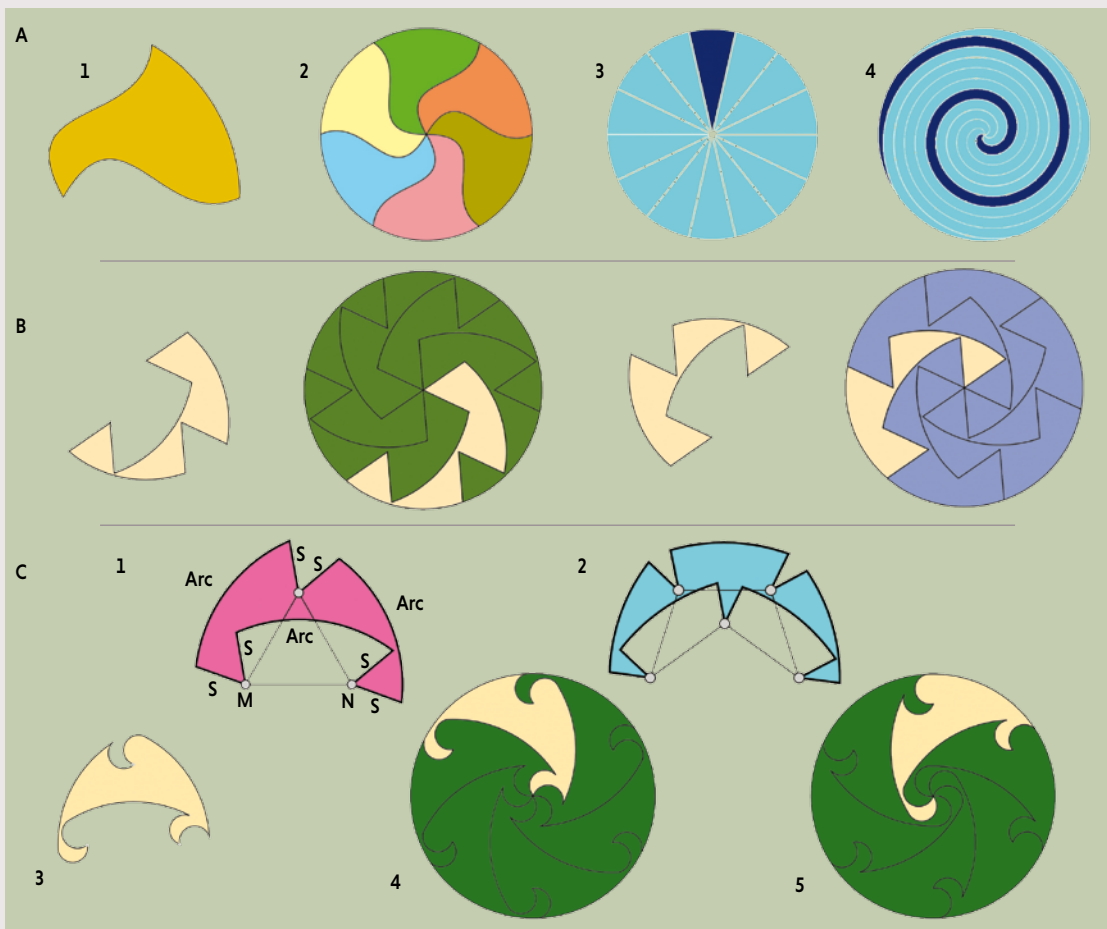
B. PARTS RADIALES À DOUBLE POSITION

Certaines formes radiales découpant un disque en parts superposables peuvent paver le disque de 2 façons (cas de la forme en jaune clair). On a démontré qu'il n'existe pas

de forme radiale qui pave le disque de 3 façons différentes ou plus.

C. CONTRAINTES SUR LES PARTS À DOUBLE POSITION

Les parts radiales à double position doivent avoir des formes très particulières (ici, la forme 3 est obtenue de la forme 1 en remplaçant le segment S par un arc de cercle ; voir le texte principal).



négatives et qu'il n'y avait qu'une seule catégorie de découpages du disque en parts superposables, celle des découpages radiaux. Nous verrons que c'est faux.

Nous avons affaire là à un piège bien connu en mathématiques: considérer comme évident quelque chose qui ne l'est pas, et du coup ne pas réfléchir et passer à côté de résultats intéressants par absence d'interrogation.

Un exemple ancien de telles «évidences» trompeuses concerne le calcul des chiffres du nombre π : toutes les méthodes qu'on utilisait jusqu'en 1995 avaient la propriété que, pour calculer les chiffres de π jusqu'à la position n ,

il fallait d'abord, ou en même temps, calculer les chiffres précédents. Simon Plouffe a découvert et prouvé que cette «évidence», jamais clairement énoncée et bien sûr jamais démontrée, est fausse. Il a proposé une méthode de calcul des chiffres de π en écriture binaire qui permet de connaître le n -ième chiffre binaire sans passer par le calcul de ceux qui précèdent. Cette méthode permet d'ailleurs aujourd'hui de connaître les chiffres binaires de π autour de la position 10^{15} alors que lorsqu'on veut tout calculer, on n'a pour l'instant pas été aussi loin.

Avant de poursuivre notre examen des >

➤ découpages du disque, précisons que nous ne voulons considérer que ceux assez réguliers et simples. On exige plusieurs conditions sur les parts superposables recherchées (vous pouvez passer leur formulation si vous trouvez que ces précisions topologiques sont trop alambiquées) :

(a) chaque part doit être d'un seul tenant (plus précisément, «connexe par arc») : on doit pouvoir rejoindre deux points d'une même part par un chemin continu entièrement inclus dans la part;

(b) chaque part doit contenir sa propre frontière : la limite d'une suite convergente de points d'une part P doit toujours appartenir à P;

(c) chaque point de la frontière d'une part doit être infiniment proche de points de l'intérieur. Autrement dit, en prenant la frontière des points intérieurs à une part P, on doit obtenir P. Cette condition évite les parts qui auraient des fils infiniment fins comme le dessin d'une cerise avec sa queue;

(d) la frontière d'une part doit être une courbe continue qui revient à son point de départ sans se croiser.

PARTS À DOUBLE POSITION RADIALE

Joel Haddley et Stephen Worsley, de l'université de Liverpool, ont pris au sérieux les questions mentionnées plus haut concernant les découpages en parts superposables du disque. Leur article, qui a connu plusieurs versions à mesure des progrès de leurs travaux, annonce une première surprise, qui est la clé de leurs découpages non radiaux du disque : il existe des découpages radiaux particuliers dont les parts reconstituent le disque de 2 façons (voir l'encadré 1, B).

Comme ces parts ont 2 positions radiales possibles, nous les dénommerons «parts à double position radiale». Leur construction mérite d'être étudiée soigneusement. Cela permettra à la fois de comprendre que la construction est exacte, qu'il n'y a pas d'entourloupe, et de concevoir une famille infinie de tels découpages. Ceux-ci amèneront des réponses à certaines questions énoncées plus haut.

2

DÉCOUPAGES NON RADIAUX EN PARTS SUPERPOSABLES

Lorsqu'on dispose d'un découpage radial du disque en parts superposables à double position radiale, où la forme de la part a un axe de symétrie, on peut obtenir un découpage non radial en parts superposables en coupant chaque part selon cet axe de symétrie. Ainsi, dans le découpage a, on est parti du découpage radial en 6 parts où chacune est délimitée par 3 arcs de cercle. Cette part (en rose) a un axe de symétrie. En coupant les 6 parts selon leur axe de symétrie, on obtient un découpage non radial du disque en 12 parts superposables (2 d'entre elles sont indiquées en bleu). Le même principe est appliqué ici aux autres découpages radiaux.

