

> découpages du disque, précisons que nous ne voulons considérer que ceux assez réguliers et simples. On exige plusieurs conditions sur les parts superposables recherchées (vous pouvez passer leur formulation si vous trouvez que ces précisions topologiques sont trop alambiquées):

(a) chaque part doit être d'un seul tenant (plus précisément, «connexe par arc»): on doit pouvoir rejoindre deux points d'une même part par un chemin continu entièrement inclus dans la part;

(b) chaque part doit contenir sa propre frontière: la limite d'une suite convergente de points d'une part P doit toujours appartenir à P;

(c) chaque point de la frontière d'une part doit être infiniment proche de points de l'intérieur. Autrement dit, en prenant la frontière des points intérieurs à une part P, on doit obtenir P. Cette condition évite les parts qui auraient des fils infiniment fins comme le dessin d'une cerise avec sa queue;

(d) la frontière d'une part doit être une courbe continue qui revient à son point de départ sans se croiser.

PARTS À DOUBLE POSITION RADIALE

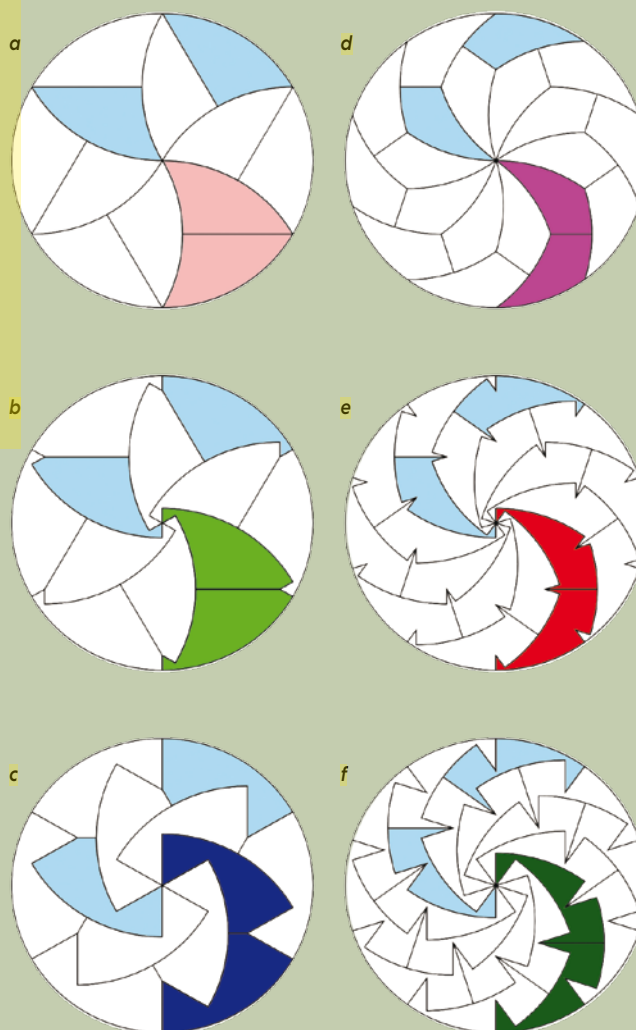
Joel Haddley et Stephen Worsley, de l'université de Liverpool, ont pris au sérieux les questions mentionnées plus haut concernant les découpages en parts superposables du disque. Leur article, qui a connu plusieurs versions à mesure des progrès de leurs travaux, annonce une première surprise, qui est la clé de leurs découpages non radiaux du disque: il existe des découpages radiaux particuliers dont les parts reconstituent le disque de 2 façons (voir l'encadré 1, B).

Comme ces parts ont 2 positions radiales possibles, nous les dénommerons «parts à double position radiale». Leur construction mérite d'être étudiée soigneusement. Cela permettra à la fois de comprendre que la construction est exacte, qu'il n'y a pas d'entourloupe, et de concevoir une famille infinie de tels découpages. Ceux-ci amèneront des réponses à certaines questions énoncées plus haut.

2

DÉCOUPAGES NON RADIAUX EN PARTS SUPERPOSABLES

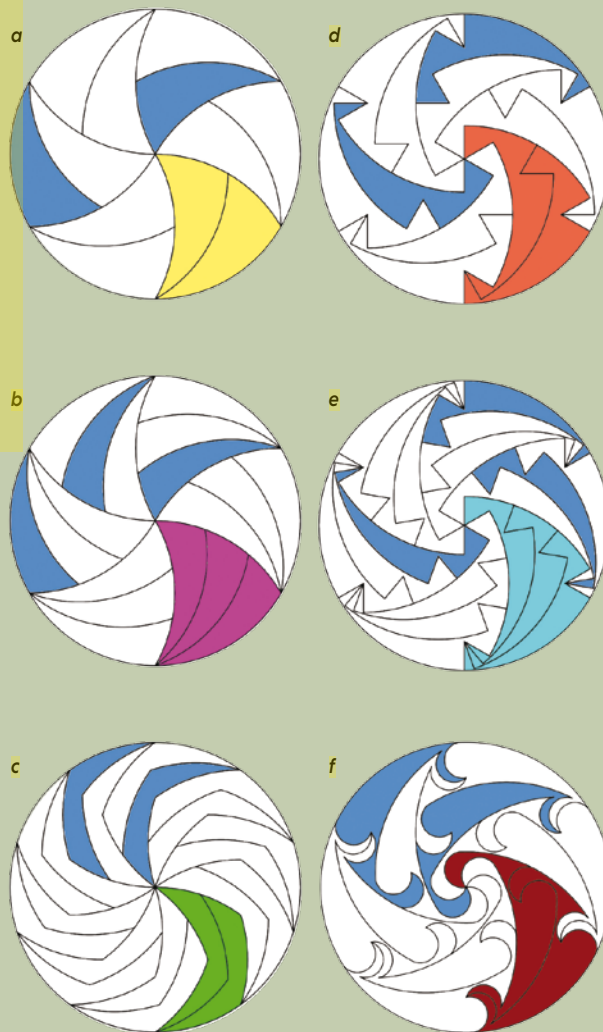
Lorsqu'on dispose d'un découpage radial du disque en parts superposables à double position radiale, où la forme de la part a un axe de symétrie, on peut obtenir un découpage non radial en parts superposables en coupant chaque part selon cet axe de symétrie. Ainsi, dans le découpage a, on est parti du découpage radial en 6 parts où chacune est délimitée par 3 arcs de cercle. Cette part (en rose) a un axe de symétrie. En coupant les 6 parts selon leur axe de symétrie, on obtient un découpage non radial du disque en 12 parts superposables (2 d'entre elles sont indiquées en bleu). Le même principe est appliqué ici aux autres découpages radiaux.



3

DÉCOUPAGE EN TRANCHES, AVEC OU SANS AXE DE SYMETRIE

Dans les découpages non radiaux représentés dans l'encadré 2, les parts sont superposables, mais la moitié d'entre elles doivent être retournées (symétrie miroir). Avec le découpage en tranches, on évite de tels retournements. Ainsi, partant du découpage radial en 6 parts sous-jacent à la figure a de l'encadré 2, on obtient un découpage (a) en 12 parts (deux sont indiquées en bleu) en faisant deux tranches identiques dans chacune des parts initiales (dont l'une est indiquée en jaune). Le même principe a été appliqué pour les autres découpages montrés ici. Dans les découpages a à e, la forme découpée possède un axe de symétrie. Ce n'est pas le cas de la forme utilisée dans le découpage f.



Dans l'encadré 1, la figure C1 représente une telle part, en faisant apparaître ses éléments de symétrie et les contraintes de construction. Selon que l'on place les points M ou N au centre du disque, on obtient le double positionnement de la part dans le disque. Le pourtour de la part doit se diviser en 3 parties superposables, car ces parties se trouvent collées dans les deux versions du disque rempli. En conséquence, les 3 sommets (*petits ronds sur le dessin*), sont aux sommets d'un triangle équilatéral. Chaque tiers du périmètre de la part est dans le dessin composé d'un segment rectiligne S, d'un arc de cercle Arc et d'un segment rectiligne S identique au premier.

Puisque la part est utilisée 6 fois dans notre exemple pour recouvrir le disque, l'arc de cercle correspond exactement à $1/6$ de la circonférence du cercle, et l'angle entre les deux segments rectilignes est de $2\pi/6$ (60°). Pour que différentes versions de la part s'emboîtent convenablement, le parcours du périmètre est donc, en partant du centre du disque: (S-Arc-S)-(S-Arc-S)-(S-Arc-S).

Un peu de réflexion suggère deux façons de généraliser ce premier exemple de part à double positionnement radial.

Dans la figure C1 de l'encadré 1, on peut remplacer les segments rectilignes S par une même courbe continue C (chacun des 6 segments S est remplacé par la même courbe C exactement, qui tourne d'un multiple de $2\pi/6$), par exemple un arc de cercle ou un zig-zag. Le périmètre d'une part devient: (C-Arc-C)-(C-Arc-C)-(C-Arc-C).

La courbe choisie ne doit pas trop s'écarter du segment qu'elle remplace pour éviter les rencontres des périmètres des parts quand on les dispose dans le disque, mais il y a néanmoins une infinité de façons de choisir la courbe C qui remplace le segment. Notons aussi que l'on peut jouer sur la longueur des segments (ou des courbes qui les remplacent) ainsi que sur l'angle qu'un couple de segments ou de courbes fait par rapport au triangle équilatéral.

Le dessin de la figure C1 avec son découpage en 3 parts, organisé sur un triangle >

BIBLIOGRAPHIE

J. Haddley et S. Worsley, **Infinite families of monohedral disk tilings**, prépublication arXiv:1512.03794, 2016.

J. Condliffe, **Mathematicians have found crazy new ways to cut pizza into equal slices**, Gizmodo, 2016 (<http://bit.ly/1SdPLFn>).