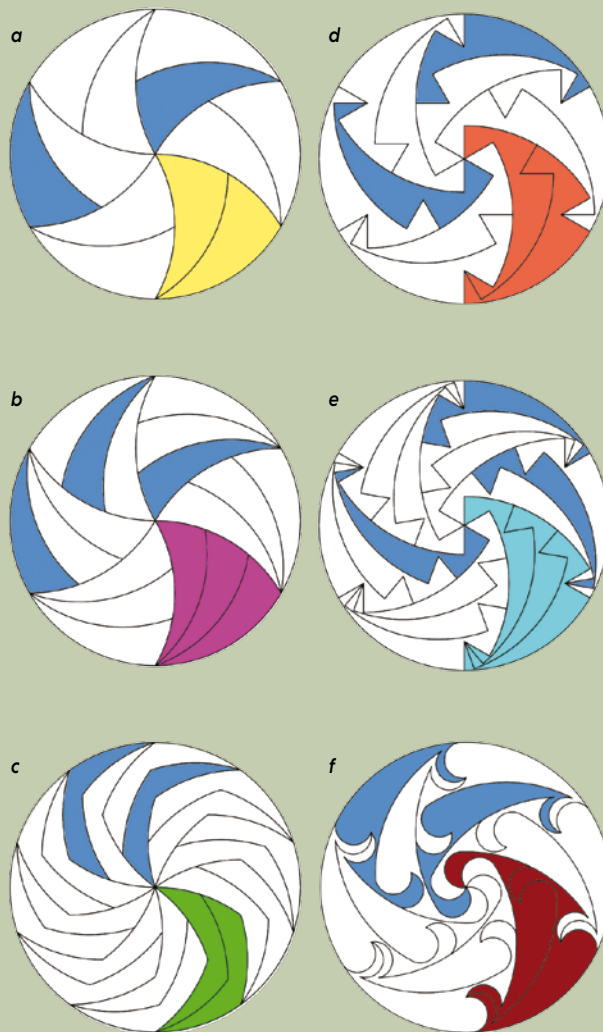


3

DÉCOUPAGE EN TRANCHES, AVEC OU SANS AXE DE SYMÉTRIE

Dans les découpages non radiaux représentés dans l'encadré 2, les parts sont superposables, mais la moitié d'entre elles doivent être retournées (symétrie miroir). Avec le découpage en tranches, on évite de tels retournements. Ainsi, partant du découpage radial en 6 parts sous-jacent à la figure a de l'encadré 2, on obtient un découpage (a) en 12 parts (deux sont indiquées en bleu) en faisant deux tranches identiques dans chacune des parts initiales (dont l'une est indiquée en jaune). Le même principe a été appliqué pour les autres découpages montrés ici. Dans les découpages a à e, la forme découpée possède un axe de symétrie. Ce n'est pas le cas de la forme utilisée dans le découpage f.



Dans l'encadré 1, la figure C1 représente une telle part, en faisant apparaître ses éléments de symétrie et les contraintes de construction. Selon que l'on place les points M ou N au centre du disque, on obtient le double positionnement de la part dans le disque. Le pourtour de la part doit se diviser en 3 parties superposables, car ces parties se trouvent collées dans les deux versions du disque rempli. En conséquence, les 3 sommets (*petits ronds sur le dessin*), sont aux sommets d'un triangle équilatéral. Chaque tiers du périmètre de la part est dans le dessin composé d'un segment rectiligne S, d'un arc de cercle Arc et d'un segment rectiligne S identique au premier.

Puisque la part est utilisée 6 fois dans notre exemple pour recouvrir le disque, l'arc de cercle correspond exactement à $1/6$ de la circonférence du cercle, et l'angle entre les deux segments rectilignes est de $2\pi/6$ (60°). Pour que différentes versions de la part s'emboîtent convenablement, le parcours du périmètre est donc, en partant du centre du disque: (S-Arc-S)-(S-Arc-S)-(S-Arc-S).

Un peu de réflexion suggère deux façons de généraliser ce premier exemple de part à double positionnement radial.

Dans la figure C1 de l'encadré 1, on peut remplacer les segments rectilignes S par une même courbe continue C (chacun des 6 segments S est remplacé par la même courbe C exactement, qui tourne d'un multiple de $2\pi/6$), par exemple un arc de cercle ou un zig-zag. Le périmètre d'une part devient: (C-Arc-C)-(C-Arc-C)-(C-Arc-C).

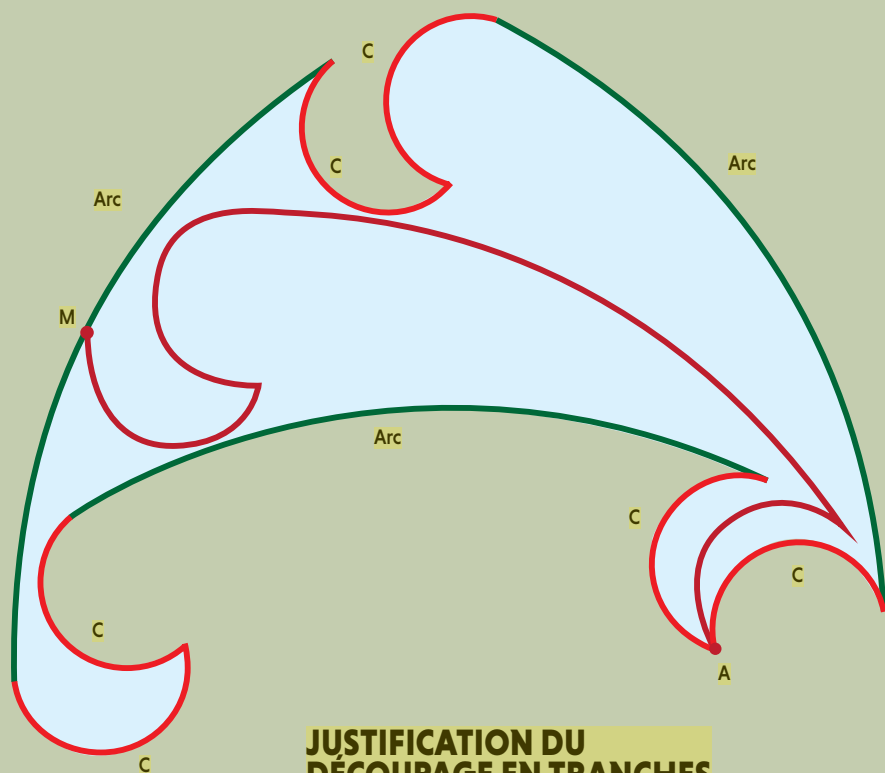
La courbe choisie ne doit pas trop s'écarter du segment qu'elle remplace pour éviter les rencontres des périmètres des parts quand on les dispose dans le disque, mais il y a néanmoins une infinité de façons de choisir la courbe C qui remplace le segment. Notons aussi que l'on peut jouer sur la longueur des segments (ou des courbes qui les remplacent) ainsi que sur l'angle qu'un couple de segments ou de courbes fait par rapport au triangle équilatéral.

Le dessin de la figure C1 avec son découpage en 3 parts, organisé sur un triangle >

BIBLIOGRAPHIE

J. Haddley et S. Worsley, **Infinite families of monohedral disk tilings**, prépublication arXiv:1512.03794, 2016.

J. Condliffe, **Mathematicians have found crazy new ways to cut pizza into equal slices**, Gizmodo, 2016 (<http://bit.ly/1SdPLFn>).



JUSTIFICATION DU DÉCOUPAGE EN TRANCHES

4

Que le découpage en tranches donne bien des parts parfaitement superposables demande un raisonnement qu'on peut faire soi-même juste en observant attentivement le dessin ci-dessus.

La part représentée (en bleu) est à double position radiale. En commençant à parcourir son périmètre par le point A, le parcours s'écrit : (C-Arc-C)-(C-Arc-C)-(C-Arc-C). On peut voir ce parcours autrement : (C-Arc-C-C)-Arc-(C-C-Arc-C), c'est-à-dire de la forme X-Arc-X. Il est alors évident que si l'on prend le point milieu M de l'Arc entre les deux X, et qu'on dessine une nouvelle courbe X entre A et M, le découpage opéré de la part à double position radiale donne deux parts parfaitement superposables, chacune ayant pour périmètre le parcours X-Arc/2-X.

Ce raisonnement s'adapte sans difficulté quand on découpe en k tranches au lieu de 2,

pourvu que ces tranches ne se touchent pas. De nouveau, la démonstration que la construction proposée est géométriquement correcte n'a demandé qu'un regard attentif.

Notons que dans le cas où la part à double position radiale prise au départ n'est pas symétrique (et dans cette situation, il y a vraiment 2 façons distinctes de remplir le disque en l'utilisant), alors on obtient des parts superposables par découpages en tranches qui remplissent le disque d'au moins 2 façons très différentes.

Notons aussi que ces découpages en tranches donnent des parts superposables qui remplissent le disque, et dont une proportion aussi grande qu'on le veut ne passe pas par le centre. Cela ne répond pas parfaitement à la question Q5, mais suggère que la réponse pourrait être positive.

▷ équilatéral, se généralise aussi en un découpage en 5 organisé autour des points d'un pentagone régulier, dont un sommet a été replié vers le centre (voir la figure C2). Le périmètre d'une part est maintenant :

(S-Arc-S)-(S-Arc-S)-(S-Arc-S)-(S-Arc-S)-(S-Arc-S).

Là encore, les segments rectilignes peuvent être remplacés par une courbe et on peut jouer sur certains angles. Des figures analogues à partir d'un polygone régulier à n côtés, pourvu que n soit impair, généralisent encore le schéma. Les angles entre deux segments (ou deux courbes qui se rejoignent aux sommets du polygone régulier) dans le cas n impair, $n \geq 3$, valent π/n . Les parts obtenues découpent le disque en $2n$ parts superposables (n impair). Pour remplir le disque, ces parts se placent de deux façons différentes, sauf dans le cas particulier où la part a un axe de symétrie, les deux placements conduisant alors au même découpage.

L'assurance que toutes ces parts et variantes remplissent exactement le disque de deux façons différentes (ou d'une seule en cas de symétrie) s'obtient simplement en examinant les dessins. On peut éventuellement s'aider de schémas supplémentaires ou de découpages de pièces en carton, mais aucun raisonnement compliqué n'est nécessaire pour contrôler cette combinatoire géométrique et être certain que tout s'ajuste comme il faut. Les démonstrations se font par le regard.

Joel Haddley et Stephen Worsley avancent un autre raisonnement qui, lui, ne se réduit pas à une observation attentive de quelques dessins. Il établit un énoncé négatif: s'il existe de très nombreuses variantes de parts à double position radiale, il n'existe aucune part à k positions radiales pour $k \geq 3$.

PREMIÈRES RÉPONSES PAR LA SYMÉTRIE

Nous disposons maintenant d'une méthode simple pour répondre à quelques-unes des questions énoncées au début de l'article.

Si l'on s'arrange pour qu'une part à double position radiale soit symétrique par rapport à une droite (dans ce cas, nous l'avons déjà signalé, les deux dispositions sont identiques), alors en coupant cette part en deux selon l'axe de symétrie, on transformera le découpage radial en n parts superposables en un découpage non radial en $2n$ parts superposables. Dans ce découpage non radial, certaines parts ne contiendront pas le centre du disque et donc n'auront pas ce centre sur leur frontière (voir l'encadré 2 pour des exemples).

Le dessin a de l'encadré 2 est le cas extrême du découpage en 6 parts quand les 3 parties du périmètre d'une part sont simplement 3 arcs de cercle (les segments rectilignes S de la figure C1 de l'encadré 1 ont été réduits à des