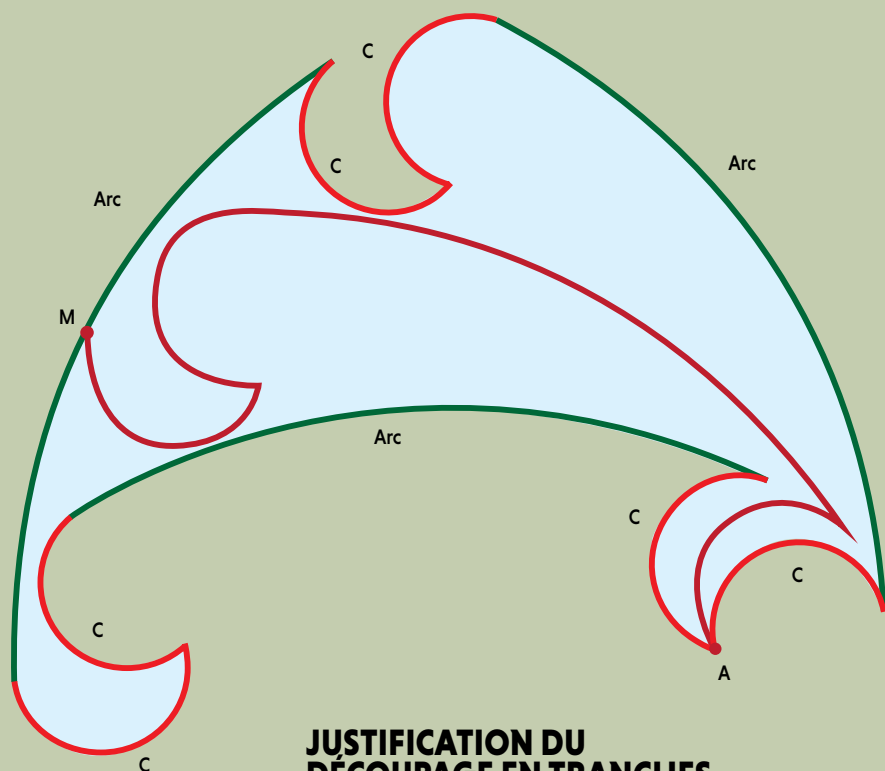




## JUSTIFICATION DU DÉCOUPAGE EN TRANCHES

➤ équilatéral, se généralise aussi en un découpage en 5 organisé autour des points d'un pentagone régulier, dont un sommet a été replié vers le centre (voir la figure C2). Le périmètre d'une part est maintenant :

(S-Arc-S)-(S-Arc-S)-(S-Arc-S)-(S-Arc-S)-(S-Arc-S).

Là encore, les segments rectilignes peuvent être remplacés par une courbe et on peut jouer sur certains angles. Des figures analogues à partir d'un polygone régulier à  $n$  côtés, pourvu que  $n$  soit impair, généralisent encore le schéma. Les angles entre deux segments (ou deux courbes qui se rejoignent aux sommets du polygone régulier) dans le cas  $n$  impair,  $n \geq 3$ , valent  $\pi/n$ . Les parts obtenues découpent le disque en  $2n$  parts superposables ( $n$  impair). Pour remplir le disque, ces parts se placent de deux façons différentes, sauf dans le cas particulier où la part a un axe de symétrie, les deux placements conduisant alors au même découpage.

L'assurance que toutes ces parts et variantes remplissent exactement le disque de deux façons différentes (ou d'une seule en cas de symétrie) s'obtient simplement en examinant les dessins. On peut éventuellement s'aider de schémas supplémentaires ou de découpages de pièces en carton, mais aucun raisonnement compliqué n'est nécessaire pour contrôler cette combinatoire géométrique et être certain que tout s'ajuste comme il faut. Les démonstrations se font par le regard.

Joel Haddley et Stephen Worsley avancent un autre raisonnement qui, lui, ne se réduit pas à une observation attentive de quelques dessins. Il établit un énoncé négatif: s'il existe de très nombreuses variantes de parts à double position radiale, il n'existe aucune part à  $k$  positions radiales pour  $k \geq 3$ .

## PREMIÈRES RÉPONSES PAR LA SYMÉTRIE

Nous disposons maintenant d'une méthode simple pour répondre à quelques-unes des questions énoncées au début de l'article.

Si l'on s'arrange pour qu'une part à double position radiale soit symétrique par rapport à une droite (dans ce cas, nous l'avons déjà signalé, les deux dispositions sont identiques), alors en coupant cette part en deux selon l'axe de symétrie, on transformera le découpage radial en  $n$  parts superposables en un découpage non radial en  $2n$  parts superposables. Dans ce découpage non radial, certaines parts ne contiendront pas le centre du disque et donc n'auront pas ce centre sur leur frontière (voir l'encadré 2 pour des exemples).

Le dessin a de l'encadré 2 est le cas extrême du découpage en 6 parts quand les 3 parties du périmètre d'une part sont simplement 3 arcs de cercle (les segments rectilignes S de la figure C1 de l'encadré 1 ont été réduits à des

# 4

**Q**ue le découpage en tranches donne bien des parts parfaitement superposables demande un raisonnement qu'on peut faire soi-même juste en observant attentivement le dessin ci-dessus.

La part représentée (en bleu) est à double position radiale. En commençant à parcourir son périmètre par le point A, le parcours s'écrit : (C-Arc-C)-(C-Arc-C)-(C-Arc-C). On peut voir ce parcours autrement : (C-Arc-C-C)-Arc-(C-C-Arc-C), c'est-à-dire de la forme X-Arc-X. Il est alors évident que si l'on prend le point milieu M de l'Arc entre les deux X, et qu'on dessine une nouvelle courbe X entre A et M, le découpage opéré de la part à double position radiale donne deux parts parfaitement superposables, chacune ayant pour périmètre le parcours X-Arc/2-X.

Ce raisonnement s'adapte sans difficulté quand on découpe en  $k$  tranches au lieu de 2,

pourvu que ces tranches ne se touchent pas. De nouveau, la démonstration que la construction proposée est géométriquement correcte n'a demandé qu'un regard attentif.

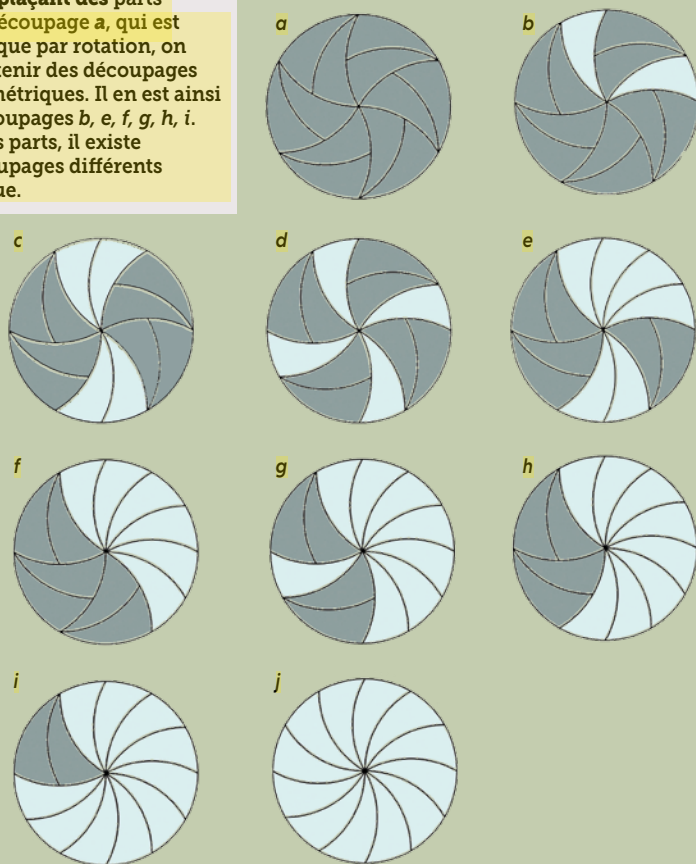
Notons que dans le cas où la part à double position radiale prise au départ n'est pas symétrique (et dans cette situation, il y a vraiment 2 façons distinctes de remplir le disque en l'utilisant), alors on obtient des parts superposables par découpages en tranches qui remplissent le disque d'au moins 2 façons très différentes.

Notons aussi que ces découpages en tranches donnent des parts superposables qui remplissent le disque, et dont une proportion aussi grande qu'on le veut ne passe pas par le centre. Cela ne répond pas parfaitement à la question Q5, mais suggère que la réponse pourrait être positive.

# 5

## DÉCOUPAGES SANS SYMÉTRIE DE ROTATION

**E**n déplaçant des parts du découpage *a*, qui est symétrique par rotation, on peut obtenir des découpages non symétriques. Il en est ainsi des découpages *b*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*. Avec ces parts, il existe 62 découpages différents du disque.



points). Cette part découpée en 2 par le milieu donne le plus élémentaire des découpages non radiaux, en 12 parts superposables.

Les dessins *b* et *c* correspondent encore à des situations où, dans la figure C1, on s'est arrangé pour avoir une part radiale symétrique à double position découpant le disque en 6, qu'on a ensuite séparée en 2, d'où un découpage non radial du disque en 12 parts superposables.

Les dessins *d*, *e* et *f* correspondent à des parts du type représenté à la figure C2: une part radiale symétrique à double position avec un périmètre composé de 5 morceaux superposables, qu'on coupe en 2, d'où un découpage non radial en 20 parts superposables.

Ces constructions répondent aux questions

Q1, Q2 et Q4 en proposant une infinité de découpages non radiaux en parts superposables, dont certaines parts ne contiennent pas le centre du disque.

### PAS DE RETOURNEMENT, MAIS DES TRANCHES FINES

Les découpages obtenus sont tels que les parts recouvrant le disque sont superposables, mais la moitié d'entre elles doivent être retournées pour remplir le disque. Est-il possible d'éviter ces retournements? La réponse est donnée par un autre principe de découpage surprenant du disque en parts superposables: le découpage en tranches.

Pour se persuader que le principe fonctionne et donc que les découpages qu'on obtient sont géométriquement parfaits, pas besoin de connaissances expertes: un examen attentif des figures découvertes par les deux chercheurs de l'université de Liverpool assure qu'elles sont correctes.

On prend des parts à double position radiale (ayant un axe de symétrie ou non) et, à la condition que les courbes utilisées pour remplacer les segments ne soient pas trop éloignées des segments qu'elles remplacent, on découvre qu'un découpage en 2, parfois 3 ou plus, parties superposables est possible (voir les encadrés 3 et 4).

Nous allons maintenant pouvoir répondre à la question Q6 sur les découpages en parts superposables n'ayant pas de symétrie de rotation. Le découpage *a* de l'encadré 3 autorise des déplacements de parts qui rompent la symétrie de rotation (voir l'encadré 5).

De tels jeux sont possibles pour tous les découpages en parts superposables provenant d'une part radiale symétrique à double position. On a donc une infinité de découpages du disque dépourvus de symétrie de rotation. Un décompte précis du nombre de façons dont on peut placer les 12 parts de la figure 3a dans le disque indique qu'il y en a 62.

On le voit, non seulement les deux géomètres britanniques ont proposé plusieurs nouvelles familles infinies de découpages du disque en parts superposables, mais ces familles donnent aussi une grande variété de dispositions pour les parts.

Restent trois questions irrésolues: Q3, Q5 et Q7. Les auteurs de l'article conjecturent que les constructions trouvées avec les découpages radiaux sont les seules possibles qui découpent le disque en parts superposables. Si cette conjecture est vraie, alors leur travail donne la réponse à la question Q7, et les questions Q3 et Q5 ont des réponses négatives. Qui saura démontrer ou infirmer la conjecture proposée, si possible à l'aide d'une démonstration accessible à tous? ■