

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

LE TOUT EST-IL PLUS QUE LA SOMME DE SES PARTIES?

Mettre à l'épreuve une vieille maxime un peu trop vague est un excellent stimulant mathématique: selon le sens qu'on donne aux mots, le mathématicien trouve que le tout est plus que la somme de ses parties... ou l'inverse!

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal).

Le dernier ouvrage
de J.-P. Delahaye:
**Mathématiques
et mystères**,
une sélection de ses
chroniques parues
dans *Pour la Science*
(Belin, 2016).



La maxime «Le tout est plus que la somme de ses parties» serait due au grand Aristote. Abondamment évoquée, elle est presque toujours applaudie sans sens critique. D'après les spécialistes, on ne trouve pas dans Aristote la phrase tant adulée. Seules certaines considérations du grand philosophe sur ce qu'est une droite évoquent une idée proche. Pour Aristote, la droite géométrique n'est pas composée de points qui seraient mis côte à côte et, ensemble, lui donneraient corps, comme nous le propose aujourd'hui la conception ensembliste. Pour lui, la droite est, en ce sens, plus que la somme de ses parties, les points.

L'intuitionnisme mathématique est une conception philosophique qui veut laisser à nos perceptions intuitives naturelles toute leur importance, sans les réduire à des manipulations symboliques. Elle refuse de traiter l'infini et le continu, donc la droite géométrique, de la manière simplifiée qu'on pratique aujourd'hui et adopte, vis-à-vis du continu, une attitude proche de celle d'Aristote: la droite est bien plus qu'un ensemble de points disposés côte à côte!

Toutefois, cette description de la droite et sa réduction ensembliste à des points est un problème de philosophie des mathématiques, alors que, lorsqu'on évoque le *tout* et la *somme de ses parties*, ce n'est pas à cela qu'on pense. L'idée est plutôt celle de la bicyclette qui est bien plus que la somme de ses composants posés au sol sans ordre: roues, pédales, chaînes, selle, etc. Pour enfourcher l'engin et aller faire un tour, il faut d'abord

assembler soigneusement ses parties, ce qui confère au *tout* des propriétés que ne possède aucun de ses composants. De même, une cellule n'est pas un tas de molécules, et un être humain n'est pas non plus un sac d'organes serrés en vrac.

C'est sans doute à cause de tels exemples que la formule est reprise par toutes sortes de systèmes philosophiques à propos de toutes sortes de sujets. Mentionnons plusieurs de ces idées et théories qui s'appuient sur la maxime.

UNE MAXIME D'ARISTOTE BRANDIE PAR DIVERSES THÉORIES

Le «holisme» du Sud-Africain Jan Christiaan Smuts (1870-1950) voit dans la nature une tendance à former des *touts* plus grands que la somme de leurs parties, en particulier grâce à l'évolution biologique.

L'idée de «synergie» évoque que le résultat d'une action collective est supérieur à la somme des résultats des actions des individus. Elle est évoquée quand plusieurs acteurs travaillant à un même but réussissent à obtenir mieux que ce qu'ils obtiendraient en œuvrant chacun de son côté.

En biologie, et dans l'étude des systèmes complexes, on parle d'«émergence» pour décrire une entité regroupant divers composants où l'on voit apparaître en son sein des propriétés ou des sous-systèmes qui ne figurent dans aucun des composants initiaux.

En psychologie, la Gestalt-thérapie du psychiatre allemand Fritz Perls (1893-1970) défend

qu'un individu doit être considéré comme un tout qu'il ne faut pas tenter de réduire à la somme de ses parties.

En médecine, en chimie et en pharmacologie, on mentionne l'«effet cocktail» quand l'action combinée de plusieurs substances n'est pas le simple cumul des actions de chacune des substances.

On discerne parfois dans ces théories ou mouvements la volonté de mettre en évidence des réalités dépassant la raison et le prétendu réductionnisme scientifique. La satisfaction un peu trop facile de donner un nom savant à ce qui n'est, dans certains cas, qu'un désir de mystère et même de magie ne doit pas faire illusion: on n'explique rien en parlant de holisme, de synergie, d'émergence, de Gestalt ou d'effet cocktail. Alors, peut-on donner un sens à la maxime «Le tout vaut plus que la somme des parties» et mieux comprendre ce que cela signifie? Tel sera notre objectif ici.

PROUVER LA MAXIME?

Pour que la maxime ait un énoncé précis, et si possible démontrable, il faut fixer une notion de valeur et constater (ou encore mieux, prouver) que la valeur du *tout* est plus grande que la somme des valeurs des *parties*. Or pour effectuer une somme et dépasser les idées vagues, il faut choisir ou définir une mesure. Il faut donc associer un nombre au *tout* et d'autres aux *parties*. La maxime, avec peut-être des hypothèses restrictives à formuler soigneusement, devrait alors devenir un théorème.

Il semble assez naturel de rechercher cette valeur sous la forme d'un contenu en information ou d'une mesure de complexité, car ce «plus» évoqué est vraisemblablement un enrichissement, ce qu'aujourd'hui nous cherchons à comprendre en employant les mots information et complexité. Pour préciser la maxime sur le *tout* et les *parties*, on doit considérer des objets $A_1, A_2, \dots, A_k$ associés chacun à une certaine complexité: $Comp(A_1), Comp(A_2), \dots, Comp(A_k)$. Ne précisons pas, pour l'instant, de quelle complexité il s'agit, ni son rapport éventuel avec de l'information. Si la maxime est vraie, le *tout*, noté $Union(A_i)$, aura une complexité plus grande que la somme des complexités individuelles: $Comp(Union(A_i)) > Comp(A_1) + \dots + Comp(A_k)$.

Sur les trois essais suivants qui viennent naturellement à l'esprit, ce souhait n'est pas exaucé!

ESSAI 1: LES ENSEMBLES

Considérons pour objets des ensembles au sens mathématique et, pour mesure de leur complexité, le nombre de leurs éléments (leur *cardinal*). Ce n'est pas absurde: plus un ensemble contient d'éléments, plus il est complexe. Il y a alors un rapport entre les deux quantités visées, mais inverse de celui attendu: $Card(Union(A_i)) \leq Card(A_1) + \dots + Card(A_k)$.

Lorsqu'un élément est présent dans plusieurs des ensembles considérés, il compte plusieurs fois dans le membre de droite et une seule fois dans le membre de gauche de l'inégalité. Dans le cas de deux ensembles, on précise >

DANS LA GESTALT-THÉORIE, LE TOUT EST PLUS QUE LA SOMME DE SES PARTIES

1

L'idée de la Gestalt-théorie, ou théorie de la forme, est qu'il faut considérer la perception d'une forme comme un tout qui est plus que la somme des perceptions des parties. On illustre souvent cette idée avec l'extraction immédiate d'une figure, ici des chevaux d'un ensemble, le tout étant détecté avant ses parties (opération de découpage).

