

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

LA SUITE DE FIBONACCI... ET SES SUITES

La suite de Fibonacci est célèbre, au point d'avoir inspiré d'autres constructions: une suite de mots, des fractales, un arbre... Tous ces objets mathématiques constituent des terrains inépuisables de découvertes, encore aujourd'hui.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal).

La suite (F_n) de Leonardo Fibonacci est définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ pour $n>1$. Ses premiers termes sont donc $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$, $F_8=21$, $F_9=34$, $F_{10}=55$, $F_{11}=89$, $F_{12}=144$, ...

Les mathématiciens, amateurs ou professionnels, l'étudient obstinément. Elle est simple, l'utiliser dans un test d'intelligence serait un cadeau, et pourtant elle engendre des surprises variées, des théorèmes et même des conjectures. Cette suite et le nombre d'or $\phi=1,618033988...$, limite du rapport de deux termes consécutifs de la suite, se retrouvent partout en mathématiques (voir l'encadré 1).

Cette ubiquité un peu semblable à celle du nombre π , qui lui aussi est présent dans une multitude de contextes mathématiques, physiques et biologiques, a une explication évidente qui devrait calmer les numéologues plus ou moins sérieux voulant y voir un mystère profond susceptible d'éclairer les sciences et les arts.

L'explication de l'ubiquité de la suite de Fibonacci et du nombre d'or est que ce sont des objets simples, puisqu'ils ont des définitions simples, et que les objets simples sont bien sûr partout !

La simplicité de la suite de Fibonacci n'est pas la même que celle des nombres 2 , $\sqrt{3}$, π ou e , eux aussi omniprésents; mais, sur le plan mathématique, c'est une suite à peu près aussi élémentaire que les suites arithmétiques $(s_{n+1}=s_n+r)$ et les suites géométriques $(s_{n+1}=ks_n)$, elles aussi rencontrées dans des contextes variés.

Reste que la suite de Fibonacci est à l'origine de questions délicates parfois difficiles et souvent inattendues. Sans refaire le parcours de tout ce qu'on sait sur elle (il faudrait un gros livre), évoquons quelques propriétés et questions fascinantes qui la concernent.

UNE MULTITUDE DE DÉFINITIONS

D'abord, nous noterons que la définition que nous avons donnée n'est qu'une définition parmi une multitude. En voici quelques autres.

– Le nombre F_n est le nombre de façons d'écrire n comme une somme de nombres entiers impairs. On a ainsi $F_6=8$ car il y a 8 façons d'écrire 6 comme somme de nombres entiers impairs: $6=1+1+1+1+1+1=1+1+1+3=1+1+3+1=1+3+1+1=3+1+1+1=1+5=5+1=3+3$.

– Le nombre F_n est le nombre de suites de longueur n composées d'entiers compris entre 1 et $n-2$ commençant par 1 et dont deux termes consécutifs diffèrent toujours exactement d'une unité. On retrouve $F_6=8$, car il y a 8 telles suites: 121212, 121232, 121234, 123212, 123232, 123234, 123432, 123434.

– Le nombre F_{n+2} est le nombre de mots de longueur n composés de 0 et de 1 et n'ayant pas deux 1 consécutifs. On retrouve par exemple que $F_5=5$, car il existe exactement 5 mots de longueur 3 ne comportant pas deux 1 consécutifs: 000, 100, 010, 001, 101. La valeur $F_6=8$ provient des 8 mots de longueur 4 ne comportant pas deux 1 consécutifs: 0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 0101, 1001, 1010.

– Le nombre F_{n+1} est le nombre de façons de paver un rectangle $2 \times n$ avec des

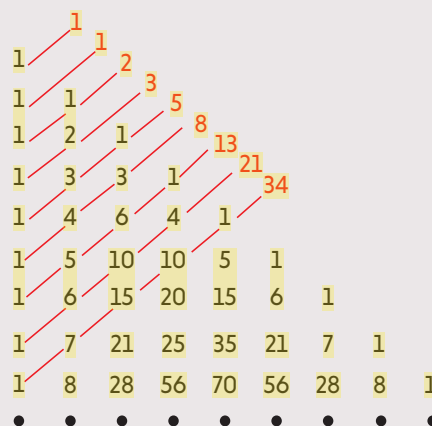
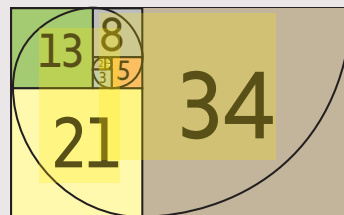
Le dernier ouvrage
de J.-P. Delahaye:
**Mathématiques
et mystères**,
une sélection de ses
chroniques parues
dans *Pour la Science*
(Belin, 2016).



1

La suite (F_n) de ces nombres vérifie $F_1 = 1, F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n > 2$. D'où : $F_n / F_{n-2} = F_{n-1} / F_{n-2} + F_{n-2} / F_{n-2}$ ou $(F_n / F_{n-1})(F_{n-1} / F_{n-2}) = F_{n-1} / F_{n-2} + 1$. Si l'on admet que le rapport F_n / F_{n-1} converge vers une limite L quand n tend vers

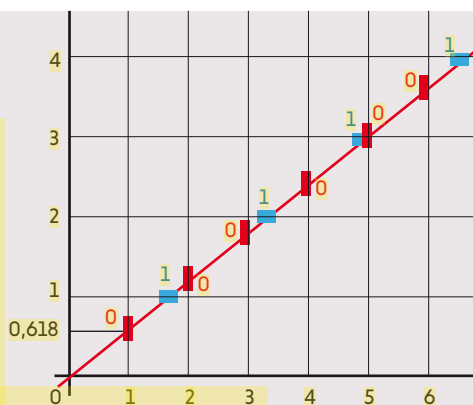
La suite de Fibonacci se retrouve souvent en mathématiques. Par exemple, c'est elle qui donne la somme des éléments des diagonales du triangle de Pascal. Dans ce triangle, on obtient le coefficient $C(n, m)$ de la ligne n et de la colonne m en additionnant celui juste au-dessus, et celui à gauche de celui juste au-dessus :

$$C(n, m) = C(n-1, m) + C(n-1, m-1).$$


<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html>

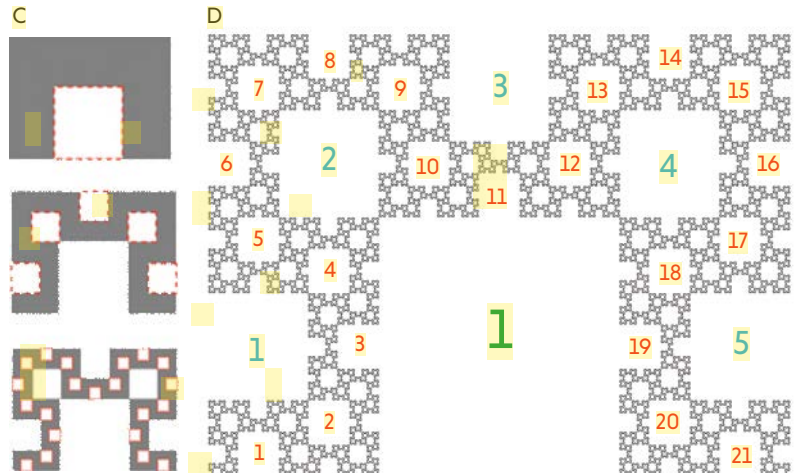
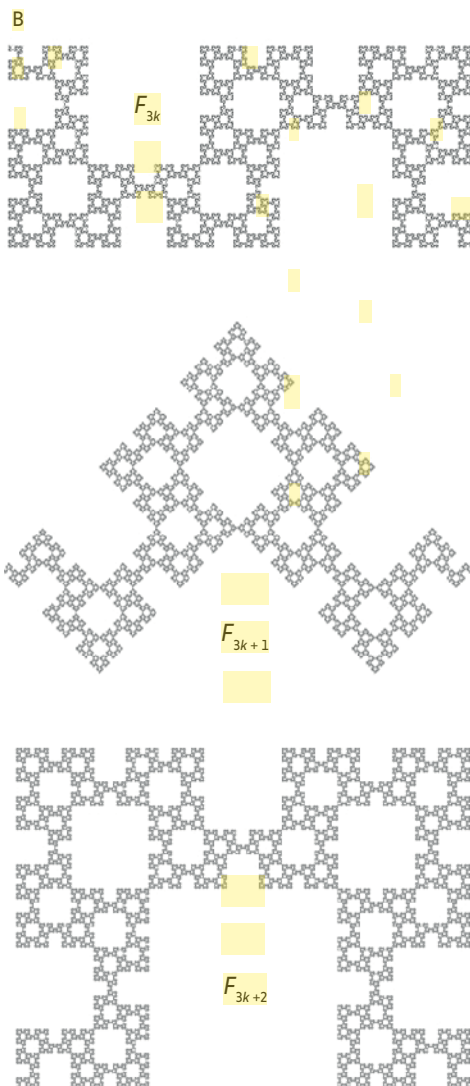
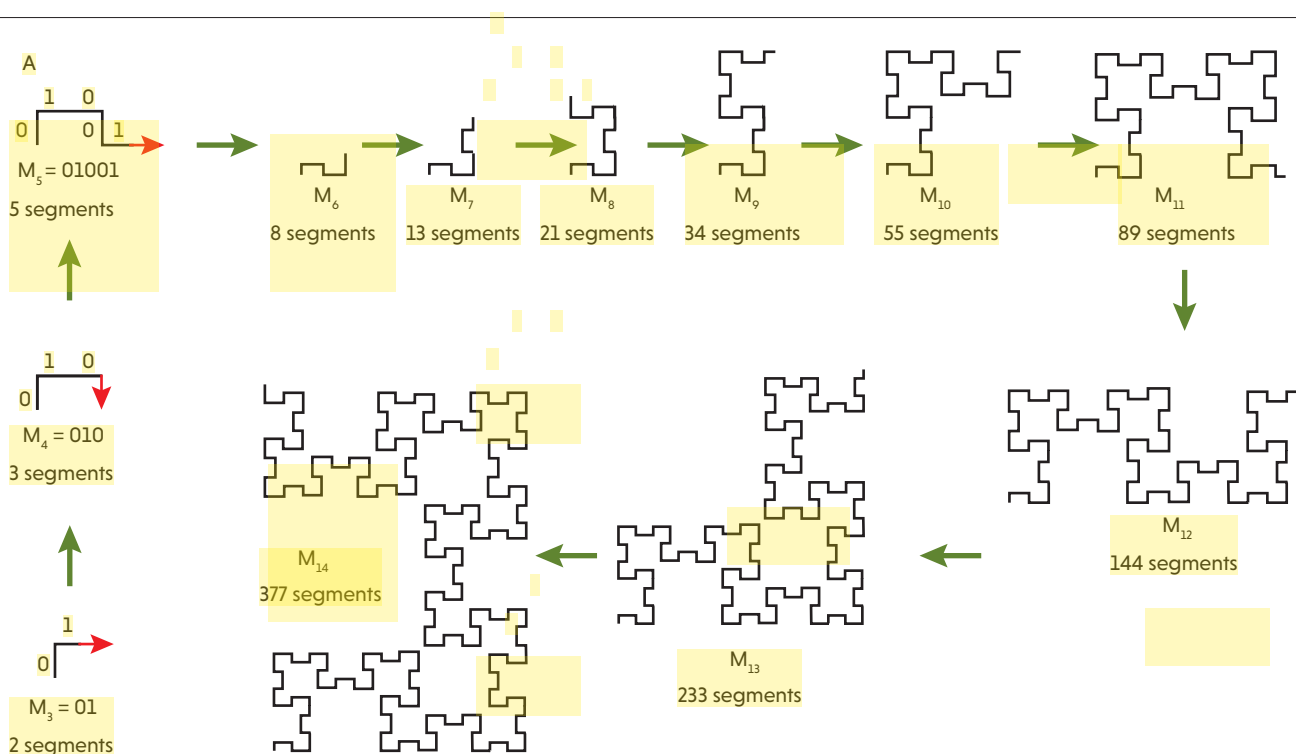
Les deux formules, utilisées convenablement, c'est-à-dire en ne recalculant pas deux fois ce dont on a besoin, fournissent un >

2



Il est lié au nombre d'or ϕ
d'une étonnante manière.
Traçons les droites d'équations

POUR LA SCIENCE N° 478 / Août 2017 / 81



LES FRACTALES DE FIBONACCI

3

Partant d'un mot M_n de Fibonacci, on lui associe un dessin (figure A) :
 – on se place à l'origine, en se dirigeant vers le haut ;
 – quand on lit la k -ième lettre de M_n , on trace un segment unité en suivant la direction que l'on a, puis :
 – si la k -ième lettre lue est un 1, on garde la même direction ;
 – si la k -ième lettre lue est un 0, on tourne vers la droite si k est pair, et vers la gauche si k est impair.

Les courbes correspondant aux entiers n de la forme $3k$ convergent vers une fractale,

de même que les courbes correspondant aux entiers de la forme $3k + 1$, ou $3k + 2$ (figure B). La fractale obtenue par exemple pour $3k + 2$, s'obtient aussi par un procédé d'évidement (C et D) : partant d'un rectangle, on en retire un carré noté 1 (en vert dans D), puis des carrés de taille un peu plus petite (numérotés en bleu) à ce qui reste. On recommence avec ce qui reste (carrés numérotés en rouge), et ainsi de suite.

La frontière de cette fractale de dimension 1,6379... est elle-même une fractale, de dimension 1,2465...