

- > algorithme efficace dont le nombre d'opérations pour calculer F_n n'augmente que logarithmiquement avec n . C'est plus efficace que la formule de Binet $F_n = (\phi^n - 1/(-\phi)^n)/\sqrt{5}$ avec $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, car pour l'utiliser, il faut d'abord connaître $\sqrt{5}$ et ϕ avec une grande précision.

Trouver les formules que nous venons de mentionner n'est pas très facile, mais les démontrer quand on les connaît est une simple question de patience: on mène un raisonnement par récurrence en utilisant $\phi^2 = 1 + \phi$ pour la formule de Binet, puis, par simple substitution et simplification, on prouve les deux formules permettant le calcul rapide.

FACTORISATION DES TERMES DE LA SUITE ET NOMBRES PREMIERS

Parmi les questions les plus étudiées figurent celles liées à la factorisation des nombres de la suite de Fibonacci. La page www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibtable.html donne la factorisation en nombres premiers des 300 premiers termes de la suite.

Une remarquable propriété des termes de la suite est: « Si n divise m , alors F_n divise F_m . » Ainsi, puisque 5 divise 15, on en déduit que $F_5 = 5$ divise $F_{15} = 610$. De même, puisque 10 divise 100, il s'ensuit que $F_{10} = 55$ divise F_{100} , ce qui est vrai puisqu'on a :

$$F_{100} = 3 \times 5^2 \times 11 \times 41 \times 101 \times 151 \times 401 \times 3001 \times 570601.$$

On tire du précédent résultat que: «Si F_n est premier, alors n est premier.» On le vérifie en constatant que tous les nombres premiers de la suite ont des numéros qui sont des nombres premiers: $F_2=2$; $F_5=5$; $F_{13}=13$; $F_{11}=89$; $F_{13}=233$; $F_{17}=1597$; $F_{23}=28657$; $F_{29}=514229$; $F_{47}=433494437$.

Autre propriété inattendue: « Si n et m sont premiers entre eux (c'est-à-dire n'ont pas de diviseur commun), alors il en est de même des termes correspondants F_n et F_m . ». Il en résulte que deux termes consécutifs de la suite n'ont jamais de facteur commun.

Encore plus surprenant: «Pour tout entier m , la suite de Fibonacci considérée modulo m est périodique.» On vérifie que la suite 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ..., prise modulo 2, donne: 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, ..., qui est de période 3. Modulo 3, la période est 8: 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, ... (le cycle est noté en bleu).

DES CONJECTURES QUI RESTENT À PROUVER

Reste une série de questions non résolues. Ainsi, on conjecture qu'il existe une infinité de nombres premiers dans la suite de Fibonacci, sans que l'on sache le démontrer.

Une remarquable conjecture concernant la suite de Fibonacci affirmait que les seuls

nombres qui sont des puissances parfaites dans la suite sont $0=0^n$, $1=1^n$, $8=2^3$ et $144=12^2$. Cette conjecture a été démontrée récemment par les mathématiciens Yann Bugeaud et Maurice Mignotte, de l'université de Strasbourg, associés au mathématicien britannique Samir Siksek, de l'université de Warwick. Ils ont publié leur résultat dans l'une des plus prestigieuses revues de mathématiques, *Annals of Mathematics* : l'intérêt pour la suite de Fibonacci n'est pas l'exclusivité des amateurs numéroluges.

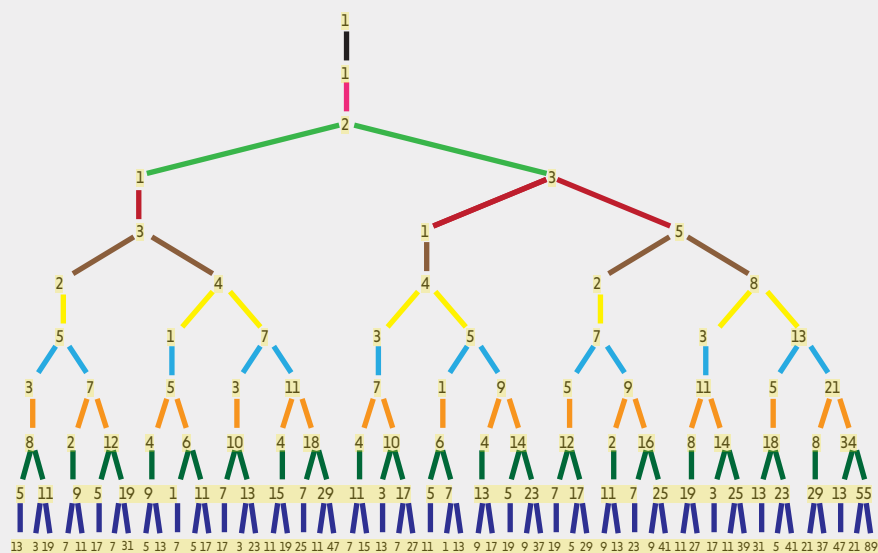
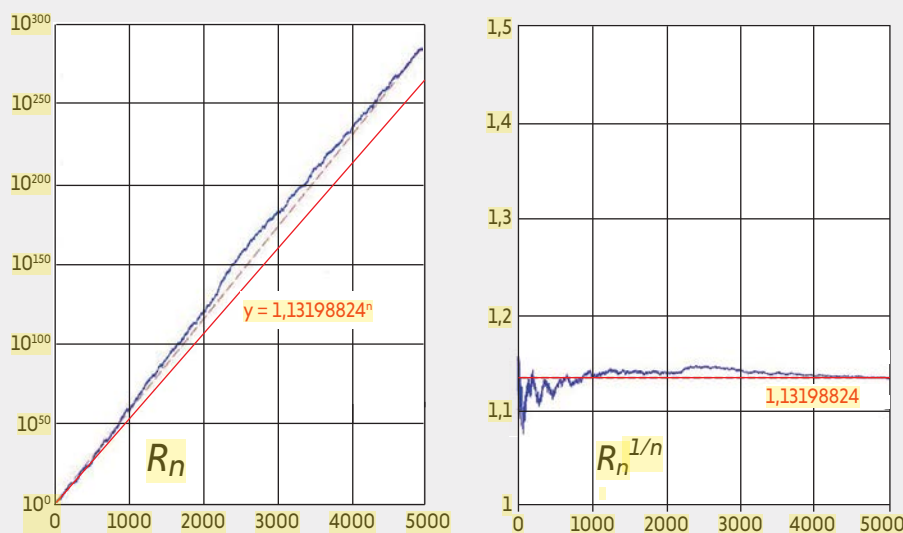
Parmi les conjectures en attente, mentionnons encore celle-ci : « Pour tout nombre premier p , le premier terme de la suite de Fibonacci non nul et divisible par p n'est pas divisible par p^2 . »

LES MOTS DE FIBONACCI

La définition de la suite de Fibonacci en suggère une, analogue, pour les « mots » composés de 0 ou 1 : $M_1 = 1$; $M_2 = 0$; $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$ pour $n > 1$. Le « + » signifie ici la concaténation. Il existe des variantes à cette définition quand on change les deux premiers mots, mais on retombe le plus souvent sur la même suite de mots, éventuellement décalée. Le début de la suite de mots est : $M_1 = 1$; $M_2 = 0$; $M_3 = 01$; $M_4 = 010$; $M_5 = 01001$; $M_6 = 01001010$; $M_7 = 0100101001001$; $M_8 = 010010100100101001010$; $M_9 = 0100101001001010010100100101001001$; $M_{10} = 0100101001001010010100100101001010010100101001010$, ... Le lien avec la suite numérique de Fibonacci est immédiat : la longueur de M_n est F_n . Un peu d'attention montre aussi que le nombre de 0 dans M_n est F_{n-1} et que le nombre de 1 est F_{n-2} . Il s'ensuit que le rapport entre le nombre de 0 et le nombre de 1 dans M_n tend vers le nombre d'or.

La méthode de la concaténation utilisée pour la construction est ici équivalente à une autre méthode: pour passer d'un mot au suivant, on remplace chaque 0 par 01 et chaque 1 par 0. On remarque que chaque nouveau mot de la suite prolonge le précédent, ce qui signifie qu'en poursuivant la construction, on obtient un mot infini composé de 0 et de 1: c'est le «mot infini de Fibonacci».

Une façon totalement inattendue de calculer ce mot infini fait apparaître un lien profond avec le nombre d'or ϕ . On trace le quadrillage du plan qui le découpe en carrés de côté 1, soit toutes les droites d'équations $x=n$ ou $y=n$ avec n entier positif. On dessine la droite de pente ϕ passant par l'origine; cette droite est d'équation $y=\phi x$. On la parcourt en commençant à l'origine des axes. À chaque fois que l'on croise une droite verticale du quadrillage, on écrit un 0, et à chaque fois que l'on croise une droite horizontale, on écrit un 1. Le mot infini que l'on obtient 010010101... est le mot infini de Fibonacci (*voir l'encadré 2*).



SUITES ALÉATOIRES ET ARBRE DE FIBONACCI

4

On peut construire une suite aléatoire inspirée de celle de Fibonacci en posant : $R_0 = 0$, $R_1 = 1$ et, pour tout entier $n > 1$, $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$ ou $|R_{n-1} - R_{n-2}|$ avec une probabilité $1/2$ pour chaque cas. Divakar Viswanath a montré que, sauf dans des cas de probabilité totale nulle, la suite $R_n^{1/n}$ converge vers une constante réelle $V = 1,132...$ (la « constante de Viswanath »).

On représente toutes les suites aléatoires de Fibonacci à l'aide d'un arbre unique. On ne figure dans cet arbre que les suites qui ne repassent pas par un même couple de nombres

consécutifs (qui serait comme un retour en arrière) : chaque nœud droit a deux descendants, l'un provenant de la somme (placé à droite), l'autre de la différence des deux termes au-dessus (placé à gauche) ; chaque nœud gauche n'en a qu'un, celui de la somme qui est considéré comme un nœud droit. Cet arbre, étudié par Benoît Rittaud, a d'extraordinaires propriétés, dont les deux suivantes :

- le nombre de nœuds de niveau n est donné par la suite de Fibonacci ;
- tout couple d'entiers (a, b) premiers entre eux apparaît une fois exactement avec a juste au-dessus de b .

> Voici encore quelques propriétés de la suite des mots de Fibonacci.

Les deux dernières « lettres » d'un mot de Fibonacci sont alternativement 01 et 10, d'un mot au suivant. En supprimant ces lettres, ce qui reste est un palindrome, c'est-à-dire un mot symétrique par rapport à son centre. Exemple : sans ses deux dernières lettres, M_8 devient 0100101001001010010, qui est identique à lui-même quand on le lit à l'envers.

Les mots de Fibonacci et le mot infini de Fibonacci ne contiennent jamais le sous-mot 11 ni le sous-mot 000.

Étrangement, concaténer deux mots de Fibonacci successifs dans un ordre ou un autre donne presque la même chose. Plus précisément, $M_n M_{n-1}$ et $M_{n-1} M_n$ sont identiques sauf pour les deux dernières lettres, qui sont inversées. Ainsi, on a $M_5 M_6 = 0100101001010$, tandis que $M_6 M_5 = 0100101001001$.

On trouve dans les mots finis ou le mot infini de Fibonacci des répétitions triples consécutives. Exemple : le sous-mot 010 figure trois fois de suite dans le mot $M_8 = 010010100100101010$. En revanche, on ne trouvera jamais de répétition quadruple d'aucun sous-mot.

Le nombre réel dont l'écriture en base 2 est donnée par le mot infini de Fibonacci 0,010010100... est, comme les nombres π et e , un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est la racine d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Le nombre de sous-mots différents de longueur n présents dans le mot infini de Fibonacci est exactement $n+1$. Par exemple, les seuls sous-mots de longueur 4 qu'on trouvera sont 0010, 0100, 0101, 1001 et 1010.

On sait depuis 2012, grâce aux profonds et difficiles travaux de Yann Bugeaud et Boris Adamczewski, que les nombres réels dont le rapport (nombre de sous-mots de longueur n de leur écriture en base 2)/ n est borné sont soit des nombres rationnels, c'est-à-dire des rapports de deux entiers, soit des nombres transcendants. Avec la propriété énoncée juste avant, ce théorème prouve à nouveau que le nombre réel dont les chiffres binaires sont ceux du mot infini de Fibonacci est un nombre transcendant.

DES FRACTALES À PARTIR DES MOTS DE FIBONACCI

Disposant des mots finis de Fibonacci, il est tentant de les utiliser pour dessiner une courbe. La méthode suivante produit un intéressant résultat.

1) On choisit un mot M_n , dont on va parcourir les F_n lettres en dessinant des segments de longueur 1.

2) On part de l'origine et on se dirige verticalement, « vers le haut ».