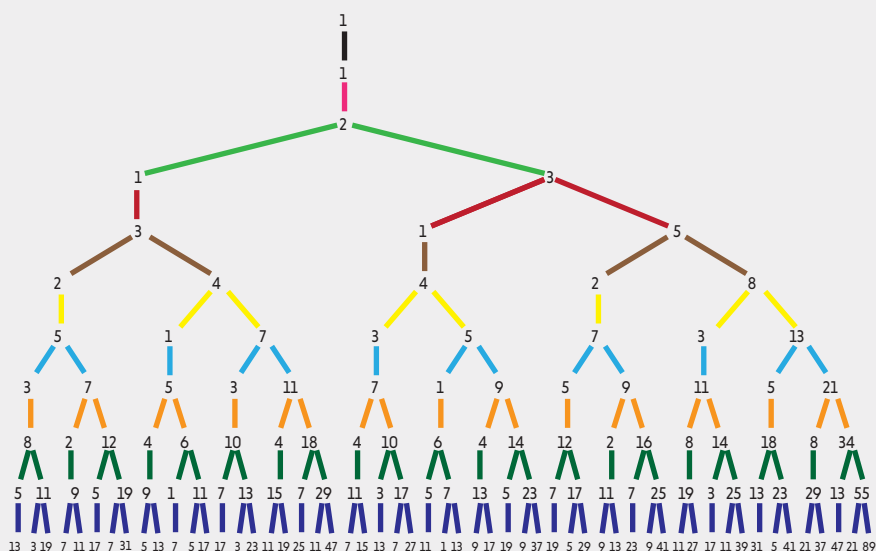
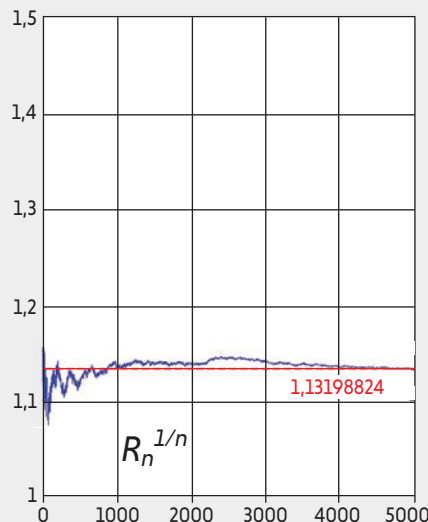
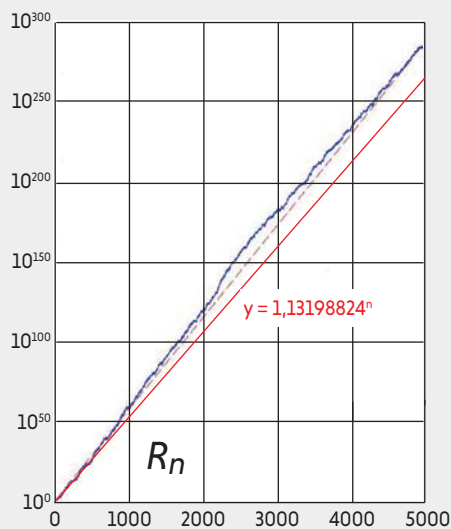




## SUITES ALÉATOIRES ET ARBRE DE FIBONACCI

4

On peut construire une suite aléatoire inspirée de celle de Fibonacci en posant :  $R_0 = 0$ ,  $R_1 = 1$  et, pour tout entier  $n > 1$ ,  $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$  ou  $|R_{n-1} - R_{n-2}|$  avec une probabilité  $1/2$  pour chaque cas. Divakar Viswanath a montré que, sauf dans des cas de probabilité totale nulle, la suite  $R_n^{1/n}$  converge vers une constante réelle  $V = 1,132...$  (la « constante de Viswanath »).

On représente toutes les suites aléatoires de Fibonacci à l'aide d'un arbre unique. On ne figure dans cet arbre que les suites qui ne repassent pas par un même couple de nombres

consécutifs (qui serait comme un retour en arrière) : chaque nœud droit a deux descendants, l'un provenant de la somme (placé à droite), l'autre de la différence des deux termes au-dessus (placé à gauche) ; chaque nœud gauche n'en a qu'un, celui de la somme qui est considéré comme un nœud droit. Cet arbre, étudié par Benoît Rittaud, a d'extraordinaires propriétés, dont les deux suivantes :

- le nombre de nœuds de niveau  $n$  est donné par la suite de Fibonacci ;
- tout couple d'entiers  $(a, b)$  premiers entre eux apparaît une fois exactement avec  $a$  juste au-dessus de  $b$ .

> Voici encore quelques propriétés de la suite des mots de Fibonacci.

Les deux dernières « lettres » d'un mot de Fibonacci sont alternativement 01 et 10, d'un mot au suivant. En supprimant ces lettres, ce qui reste est un palindrome, c'est-à-dire un mot symétrique par rapport à son centre. Exemple : sans ses deux dernières lettres,  $M_8$  devient 0100101001001010010, qui est identique à lui-même quand on le lit à l'envers.

Les mots de Fibonacci et le mot infini de Fibonacci ne contiennent jamais le sous-mot 11 ni le sous-mot 000.

Étrangement, concaténer deux mots de Fibonacci successifs dans un ordre ou un autre donne presque la même chose. Plus précisément,  $M_n M_{n-1}$  et  $M_{n-1} M_n$  sont identiques sauf pour les deux dernières lettres, qui sont inversées. Ainsi, on a  $M_5 M_6 = 0100101001010$ , tandis que  $M_6 M_5 = 0100101001001$ .

On trouve dans les mots finis ou le mot infini de Fibonacci des répétitions triples consécutives. Exemple : le sous-mot 010 figure trois fois de suite dans le mot  $M_8 = 010010100100101010$ . En revanche, on ne trouvera jamais de répétition quadruple d'aucun sous-mot.

Le nombre réel dont l'écriture en base 2 est donnée par le mot infini de Fibonacci 0,010010100... est, comme les nombres  $\pi$  et  $e$ , un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est la racine d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Le nombre de sous-mots différents de longueur  $n$  présents dans le mot infini de Fibonacci est exactement  $n+1$ . Par exemple, les seuls sous-mots de longueur 4 qu'on trouvera sont 0010, 0100, 0101, 1001 et 1010.

On sait depuis 2012, grâce aux profonds et difficiles travaux de Yann Bugeaud et Boris Adamczewski, que les nombres réels dont le rapport (nombre de sous-mots de longueur  $n$  de leur écriture en base 2)/ $n$  est borné sont soit des nombres rationnels, c'est-à-dire des rapports de deux entiers, soit des nombres transcendants. Avec la propriété énoncée juste avant, ce théorème prouve à nouveau que le nombre réel dont les chiffres binaires sont ceux du mot infini de Fibonacci est un nombre transcendant.

## DES FRACTALES À PARTIR DES MOTS DE FIBONACCI

Disposant des mots finis de Fibonacci, il est tentant de les utiliser pour dessiner une courbe. La méthode suivante produit un intéressant résultat.

1) On choisit un mot  $M_n$ , dont on va parcourir les  $F_n$  lettres en dessinant des segments de longueur 1.

2) On part de l'origine et on se dirige verticalement, « vers le haut ».

3) Quand on lit la  $k$ -ième lettre de  $M_n$ , on trace un segment en suivant la direction que l'on a.

4) Si la  $k$ -ième lettre lue est un 1, on garde la même direction.

5) Si la  $k$ -ième lettre lue est un 0, on tourne vers la droite si  $k$  est pair, et vers la gauche si  $k$  est impair.

Les courbes ainsi construites (voir l'encadré 3) ne se recoupent jamais. Elles se classent en trois catégories, selon que l'indice du mot utilisé est un multiple de 3, un multiple de 3 additionné de 1, un multiple de 3 additionné de 2. Si l'on s'intéresse à toutes les courbes correspondant aux multiples de 3, en les tournant et en les ramenant à la même taille, il apparaît que les courbes convergent vers une forme unique très découpée. Cette forme limite a été étudiée par l'amateur français Alexis Monnerot-Dumaine en 2008. Le facteur d'agrandissement entre le dessin correspondant à l'indice  $k$  et le dessin pour l'indice  $k+3$  est  $1+\sqrt{2}$ , et la dimension fractale (ou dimension de Hausdorff) de la figure limite est :

$$3 \log \phi / \log(1+\sqrt{2}) = 1,6379...$$

Rappelons que la dimension de Hausdorff d'une courbe lisse (cercle, droite, parabole, etc.) est 1, que la dimension de Hausdorff d'un morceau de surface plein (disque, carré rempli, etc.) est 2. La valeur 1,6379... trouvée pour la figure associée aux mots de Fibonacci prouve donc sa nature fractale au sens rigoureux du terme : cette figure est de dimension non entière, ici comprise entre 1 et 2.

La frontière de cette fractale est aussi très découpée. C'est une autre figure fractale, dont la dimension est plus petite ( $\log 3 / \log(1+\sqrt{2}) = 1,2465...$ ) que la précédente.

De manière remarquable, d'autres procédés de construction conduisent à cette même forme fractale. En voici deux.

On sait que le célèbre tapis de Sierpiński s'obtient par évidements successifs : un carré plein est divisé en 9 carrés identiques ; on retire le carré central ; on recommence avec les 8 carrés restants, etc. La fractale de Fibonacci s'obtient aussi par évidements successifs : on part d'un rectangle plein de côtés 1 et  $\sqrt{2}$ , on enlève un carré de côté  $1/\sqrt{2}$  au milieu en bas du rectangle, puis on recommence en enlevant à chaque étape une série de carrés dont la taille est divisée d'une étape à l'autre par  $1+\sqrt{2}$  et dont la position suit une règle facile à comprendre en observant les deux premières étapes (voir l'encadré 3).

À la grande surprise de tous, Ron Knott a découvert un procédé encore plus simple pour arriver à cette fractale de Fibonacci : on suit les chiffres d'un mot de Fibonacci en traçant des segments de longueur 1 comme dans la première construction, mais maintenant on tourne à droite ou à gauche à chaque nouvelle lettre,

en changeant de direction pour tourner quand la lettre lue est 1.

Une idée très naturelle de généralisation de la suite de Fibonacci faisant intervenir le hasard est la suivante : on pose  $R_0=0$ ,  $R_1=1$  et, pour tout entier  $n>1$ ,  $R_n=R_{n-1}+R_{n-2}$  ou  $|R_{n-1}-R_{n-2}|$  avec une probabilité  $1/2$  pour chaque cas.

Autrement dit, à chaque nouveau nombre calculé, on choisit au hasard, avec une probabilité  $1/2$ , d'additionner les deux derniers, ou de les soustraire l'un à l'autre sans s'occuper du signe du résultat.

Un remarquable résultat a été établi au sujet de ces suites aléatoires de Fibonacci par Divakar Viswanath, de l'université du Michigan : avec une probabilité 1, la suite  $R_n^{1/n}$  converge vers une constante réelle  $V$  égale à 1,132...

Cette nouvelle constante mathématique jamais rencontrée auparavant a bien sûr été dénommée constante de Viswanath. Elle est très mal connue et ceux qui s'y sont intéressés sont en désaccord dès sa quatrième décimale. Certains prétendent que c'est 1,132150... alors que d'autres affirment que c'est 1,131988... Un lecteur pourra-t-il mener des calculs qui tranchent la question ?

Notons que l'expression « avec une probabilité 1 » signifie qu'il y a autant de chances d'obtenir une autre limite que la constante de Viswanath qu'il y a de chances de tomber toujours sur pile en lançant indéfiniment une pièce de monnaie non truquée dans une série infinie de tirages à pile ou face.

## L'ARBRE DE FIBONACCI

On peut représenter toutes les suites aléatoires de Fibonacci à l'aide d'un arbre. Si l'on ne souhaite représenter que les suites qui ne repassent pas par un même couple de nombres consécutifs (car c'est en quelque sorte revenir en arrière), dessiner l'arbre de toutes les suites aléatoires de Fibonacci devient simple (voir l'encadré 4). Ce nouvel arbre mathématique, introduit par Benoît Rittaud, de l'université Paris 13, présente d'intéressantes propriétés :

- le nombre de nœuds de niveau  $n$  est donné par la suite de Fibonacci ;

- la somme  $S_k$  des nombres de la ligne  $k$  vérifie  $S_k = 2S_{k-1} + S_{k-3}$ .

Surtout, cet arbre présente l'extraordinaire et inattendue propriété que tout couple d'entiers  $(a, b)$  premiers entre eux apparaît une fois exactement avec  $a$  juste au-dessus de  $b$  et que le chemin qui y mène est directement lié à la fraction continue du nombre  $a/b$ .

On le voit, loin de s'épuiser, l'intérêt pour la suite de Fibonacci et les objets apparentés semble s'étendre et produire sans cesse des idées, théorèmes et conjectures qui enrichissent la connaissance des procédés élémentaires de construction associés et leurs mystères. ■

## BIBLIOGRAPHIE

K. Hare et J. C. Saunders, **On  $(a, b)$  pairs in random Fibonacci sequences**, prépublication arXiv:1608.03522, 2016.

S. Eliahou, **Mystères arithmétiques de la suite de Fibonacci, Images des Mathématiques**, 2014 : <http://bit.ly/2rzvvtvJ>

A. Monnerot-Dumaine, **The Fibonacci Word fractal**, 2009 : <http://bit.ly/2rzgiCv>

B. Rittaud, **On the average growth of random Fibonacci sequences**, *Journal of Integer Sequences*, vol. 10, article 07.2.4, 2007.

Y. Bugeaud et al., **Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations I. Fibonacci and Lucas perfect powers**, *Annals of Mathematics*, vol. 163, pp. 969-1018, 2006.