

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

CINQ ÉNIGMES POUR LA RENTRÉE

Un bon problème mathématique doit avoir
une solution qui ne vient pas toute seule.
En voici cinq exemples...

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)

Un de mes professeurs parlait de **démonstration « âne-qui-trotte »** pour désigner les démonstrations qu'on mène en appliquant les définitions de base et en opérant quelques calculs et déductions faciles, n'exigeant aucun effort d'imagination. À l'opposé, les situations que préfèrent les mathématiciens sont celles où les techniques usuelles échouent et où il faut contourner le problème, le prendre par surprise, introduire des éléments qui n'ont en apparence aucun rapport avec l'énoncé et qui brusquement dénouent les difficultés.

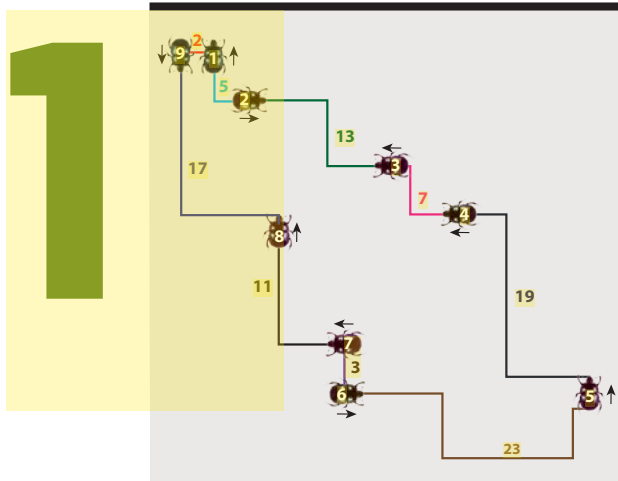
De nombreux lecteurs m'ont écrit à la suite de l'article du mois de février où je présentais sept situations miraculeuses propres à réjouir les amateurs de mathématiques de toutes catégories. Puisque ces petits miracles ont intrigué et amusé, en voici cinq autres exposés sous la forme d'énigmes.

ÉNIGME 1: NEUF SCARABÉES ET DES NOMBRES PREMIERS

On place neuf scarabées sur un circuit, les écarts entre deux scarabées consécutifs, mesurés en mètres le long du circuit, étant l'un des neuf premiers nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23. L'ordre est quelconque et chacun des nombres apparaît une fois exactement. Si l'on fixe arbitrairement le scarabée considéré comme premier, il y a par exemple un écart de 5 mètres entre le premier et le deuxième (en tournant dans le sens horaire), de 13 mètres entre le deuxième et le troisième, de 7 mètres entre le troisième et le quatrième, puis 19, 23, 3, 11, 17 et 2 (entre le dernier et le premier).

Au départ, chaque scarabée choisit au hasard s'il ira, à 1 mètre par minute, dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse. Quand deux scarabées se rencontrent, ils font instantanément demi-tour. On suppose que la taille des scarabées est négligeable. Au bout de 50 minutes, après de multiples rencontres et demi-tours des neuf scarabées, on note leurs positions et les écarts qui les séparent. Les neuf écarts sont encore les neuf premiers nombres premiers! Comment expliquer ce miracle arithmétique?

LES NEUF SCARABÉES



Solution: Notons que le circuit a une longueur de 100 mètres, car $2+3+5+7+11+13+17+19+23=100$. Si A est un point du circuit, appelons « point opposé à A » le point B situé à 50 mètres sur le circuit, c'est-à-dire le point à égale distance de A que l'on circule dans le sens horaire ou dans le sens antihoraire.

Imaginons que chaque scarabée porte un drapeau (comme pour l'un des problèmes de février) et que lorsque deux scarabées se rencontrent, ils échangent leurs drapeaux. Chaque drapeau tournera toujours dans le même sens à la vitesse de 1 mètre par minute et, à chaque instant, chaque scarabée portera un seul drapeau.

En cinquante minutes, chaque drapeau aura donc parcouru 50 mètres, ce qui est la moitié exactement de la longueur totale du circuit. Il sera donc arrivé au point opposé à son point de départ. Les positions des scarabées sont les mêmes que les positions des drapeaux, car chaque scarabée, même s'il a changé de drapeau, porte exactement un drapeau. Si le circuit était circulaire, le dessin de leurs positions serait le symétrique par rapport au centre du cercle du dessin initial des positions, et donc les écarts entre scarabées consécutifs seraient les mêmes qu'au départ, c'est-à-dire les neuf premiers nombres premiers. Ces nombres apparaissent dans le même ordre qu'au départ à la condition de tourner dans le sens des aiguilles d'une montre et de partir du scarabée situé au point opposé à celui où se trouvait le premier scarabée dans la description initiale. Que le circuit ne soit pas circulaire ne change pas cette propriété des écarts, qui ne dépend que de la notion de point opposé, et les écarts entre scarabées au bout de 50 minutes sont bien les neuf premiers nombres premiers.

Bien sûr, l'information que les distances sont des nombres premiers n'a aucune importance et constitue un piège: seule leur somme 100 (double de 50) intervient dans la solution.

Notons aussi que ce qui se produit au bout de 50 minutes se produit aussi pour 100 minutes, 150 minutes, etc. mais qu'entre ces moments particuliers, les écarts entre scarabées n'ont pas de raison d'être des nombres premiers.

ÉNIGME 2: DES PAVAGES HEXAGONAUX

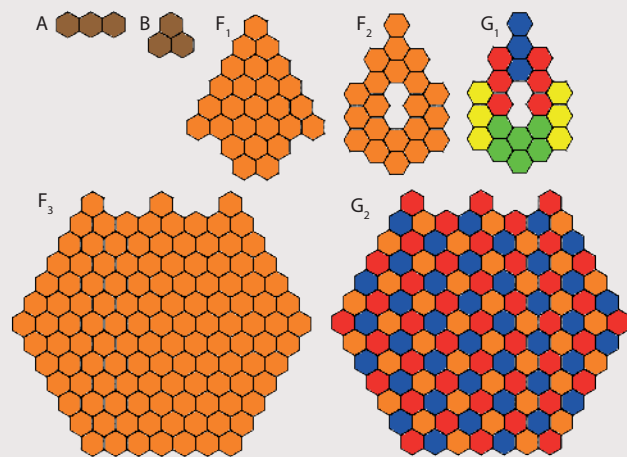
En utilisant des copies des formes A et B (voir l'illustration 2), il faut recouvrir parfaitement les figures F_1 , F_2 , F_3 , ou montrer que c'est impossible (les raisonnements d'impossibilité sont importants en mathématiques et on peut les rechercher pour s'entraîner).

On cherche donc à paver F_1 , F_2 et F_3 à l'aide des triples hexagones A et B dont on dispose d'autant d'exemplaires que souhaité.

Pour la première forme F_1 , c'est impossible car elle est composée d'un nombre d'hexagones (26) qui n'est pas un multiple de 3; or si

2

PAVAGES HEXAGONAUX



l'on pave une forme avec A et B, elle sera forcément composée d'un nombre d'hexagones multiple de 3.

Pour la deuxième forme F_2 , le nombre d'hexagones (21) est un multiple de 3 et on peut donc envisager de la paver avec des A et des B. C'est pourtant impossible, comme on le voit en raisonnant sur la figure G_1 . Pour paver la sorte de pointe en haut (*en bleu*), il faut nécessairement utiliser le pavé A. Ce qui reste alors à paver comporte encore deux sortes de pointes (*en rouge*) qui exigent à nouveau l'utilisation du pavé A, deux fois. Ce qui reste exige à nouveau deux fois la forme A (*en jaune*). Ce qui reste alors (*en vert*) est clairement impossible à paver avec A et B. Le raisonnement s'est déroulé rigoureusement en ne laissant aucune possibilité inexplorée: paver F_2 avec des A ou B est impossible.

La troisième forme F_3 est elle aussi impossible à paver avec des A ou B, mais c'est moins évident. Comment le démontrer?

Solution: La méthode utilisée pour la forme F_1 ne marche pas, car F_3 contient 123 hexagones, et 123 est multiple de 3. On peut essayer et raisonner en utilisant un argument du même type que celui mené pour F_2 . J'ignore si cette méthode aboutit, mais si c'est le cas cela doit être assez compliqué, car plusieurs positionnements des pièces A et B sont possibles quel que soit le point de départ envisagé pour le pavage. Une chose est certaine, la méthode suivante, à l'aide d'un coloriage, est plus rapide. Elle utilise un élément qui n'apparaît pas dans l'énoncé: on colorie le dessin avec trois couleurs comme sur la figure G_2 .

On note alors que, en plaçant n'importe où sur ce coloriage une forme A ou B, cette forme couvre nécessairement exactement un hexagone bleu, un rouge et un orange. Si l'on pouvait paver F_3 avec des A et des B, cela impliquerait >



Le dernier ouvrage de J.-P. Delahaye: **Mathématiques et mystères**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2016).